MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 13 / 1977

Gewöhnliche Differentialgleichungen

27.3. - 2.4. 1977

Die sechste Tagung über gewöhnliche Differentialgleichungen fand wiederum unter der Leitung von H. W. Knobloch (Würzburg) und R. Reißig (Bochum) statt. Das Interesse an diesen Tagungen ist in den letzten Jahren in bemerkenswerter Weise gestiegen, und es fällt schwer, die vielen Einladungswünsche (die vor allem aus dem Ausland geäußert werden) zu erfüllen. Von den 32 Teilnehmern kamen 15 aus dem Ausland und 17 aus dem Inland; die ausländischen Kollegen hielten 16 der insgesamt 27 Vorträge, die durchweg reges Interesse fanden.

Die Thematik der Vorträge war recht uneinheitlich, Schwerpunkte waren kaum zu erkennen; einige wichtige Teilgebiete (z.B. stochastische Differentialgleichungen oder Funktionaldifferentialgleichungen) waren nicht bzw. kaum vertreten. Die behandelten Probleme lassen sich etwa mit folgenden Stichworten umreißen: Abstrakte Differentialgleichungen, verallgemeinerte Lösungen, Klassifizierung des globalen Lösungsverhaltens; Rand- und Eigenwertprobleme, periodische Lösungen bei autonomen und nicht-autonomen Systemen; Linearisierung, Mittelwertmethode; Differentialgleichungen für spezielle Funktionen im Reellen und im Komplexen; Hamiltonsche Systeme; Probleme der Kontrolltheorie und Differentialspiele; Untersuchungen bei partiellen Differentialgleichungen mittels Diskretisierung und Reduktion auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

Ein von Herrn Kirchgraber (Zürich) vorgeführter Film über Resonanzerscheinungen mechanischer Systeme vom Duffingschen Typ war recht eindrucksvoll und eine geeignete Ergänzung der theoretischen Grundlagen. Es wäre durchaus zu wünschen, auf den künftigen Tagungen Problemen der Anwendungen, die zweifellos in reichem Maße vorhanden sind, mehr Aufmerksamkeit als bisher zu widmen.

Im übrigen hatte man den Eindruck, daß alle Teilnehmer mit dem Verlauf und den Ergebnissen der Tagung zufrieden waren; dies wird auch durch die Tatsache belegt, daß viele der teilnehmenden Kollegen bereits mehrmals, einige sogar schon von Anfang an, die Tagungen über gewöhnliche Differentialgleichungen besucht und aktiv mitgewirkt haben.

Teilnehmer

B. Aulbach (Würzburg)
W.A. Coppel (Canberra)
K. Deimling (Paderborn)
W. Eberhard (Duisburg)
M. Essén (Stockholm)
G. Freiling (Duisburg)
M. Giertz (Stockholm)
W. Hahn (Graz)
O. Hájek (Cleveland)
W. Haußmann (Duisburg)
U. Kirchgraber (Zürich)
H.W. Knobloch (Würzburg)
R. Lemmert (Karlsruhe)
J. Mawhin (Louvain-la-Neuve)
K. Nixdorff (Hamburg)
M. Pachter (Pretoria)
K.J. Palmer (z.Zt.Bochum)
H.O. Peitgen (Bonn)
L. Reich (Graz)
Frau G. Reißig (Bochum)
R. Reißig (Bochum)
E.O. Roxin (Kingston)
H. Rüßmann (Mainz)
P. Sagirow (Stuttgart)
K. Schmitt (Salt Lake City)
U. Staude (Mainz)
E. Thomas (z.Zt.Würzburg)
Frau I. Troch (Wien)
P. Volkmann (Karlsruhe)
W. Walter (Karlsruhe)
P.E. Waltman (Iowa City)
H. Wimmer (Würzburg)

Vortragsauszüge

B. AULBACH: Bestimmung des Einzugsbereichs eines asymptotisch stabilen Grenzzyklus einer autonomen Differentialgleichung

Ausgangspunkt ist eine von V.I.Zubov stammende Methode (1957) zur Bestimmung des Einzugsbereichs einer asymptotisch stabilen stationären Lösung einer autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$. Das Resultat ist die Charakterisierung des Einzugsbereichs als dasjenige maximale Gebiet, in das sich die eindeutige analytische Lösung der sogenannten Zubov-Gleichung, einer partiellen Differentialgleichung, analytisch fortsetzen läßt.
Ein entsprechendes Resultat läßt sich erzielen, wenn der Attraktor nicht mehr von einer stationären asymptotisch stabilen, sondern von einer nicht-konstanten periodischen, orbital asymptotisch stabilen Lösung gebildet wird. Der Beweis hierzu beruht auf einer Zurückführung des nichtstationären Problems auf das stationäre von Zubov. Dies geschieht durch Ausnutzen der Tatsache, daß die Ausgangsdifferentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ Integralmannigfaltigkeiten besitzt, auf denen der Fluß mittels - dimensionsmäßig kleinerer - Differentialgleichungen beschrieben wird, die eine asymptotisch stabile Ruhelage besitzen.

W.A. COPPEL: Systems of bounded growth

A solution $\tilde{x}(t)$ of a differential equation $x' = f(t,x)$ on an interval J may be said to be (right-)uniformly continuous in its initial value if for each $\varepsilon > 0$ there is a $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ such that any solution $x(t)$ which satisfies $|x(s) - \tilde{x}(s)| < \delta$ for some $s \in J$ is defined and satisfies $|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$ for all $t \in J$ with $s \leqq t \leqq s+1$.
The trivial solution of the linear differential equation $x' = A(t)\,x$ is uniformly continuous in its initial value iff there exists a $C \geqq 1$ such that any solution $x(t)$ satisfies $|x(t)| \leqq C\,|x(s)|$ for $s \leqq t \leqq s+1$ or, equivalently, iff there exist K, $\alpha > 0$ such that the fundamental matrix $X(t)$ satisfies

$$|X(t)\,X^{-1}(s)| \leqq K\,e^{\alpha(t-s)} \quad \text{for } t \geqq s .$$

A number of sufficient conditions for a linear differential equation to have bounded growth, in this sense, may be given.

A linear differential equation may be said to have dichotomous growth if its fundamental matrix $X(t)$ satisfies

$$|X(t)\ P\ X^{-1}(s)| \leq K\ e^{\alpha(t-s)} \quad \text{for } t \geq s\ ,$$
$$|X(t)\ (I-P)\ X^{-1}(s)| \leq K\ e^{\alpha(s-t)} \quad \text{for } s \geq t\ ,$$

where $P^2=P$ and $K,\alpha > 0$. By means of this concept a number of results may be extended, so that the hypotheses are both necessary and sufficient.

K. DEIMLING: Nachweis periodischer Lösungen parabolischer Differentialgleichungen durch Semidiskretisierung

Gesucht werden ω-periodische Lösungen des Problems

$$(1)\quad \begin{cases} u_t = a(x,u)\ u_{xx} + b(t,x,u,u_x) & \text{in } \mathbb{R}\times[0,1] \\ u_x(t,0) = -\varphi(\alpha(t),u(t,0)),\ u_x(t,1) = \varphi(\beta(t),u(t,1))\ , \end{cases}$$

wobei $b(.,x,z,p)$ und α,β ω-periodisch sind. (1) wird bezüglich x diskretisiert, d.h. man betrachtet $h = 1/(n+1)$, setzt $x_\nu = \nu h$ für $\nu = 0,\dots,n+1$ und erhält das diskrete System

$$(1_n)\quad \begin{cases} u_\nu' = a(x_\nu,u_\nu)\ u_{\overline{xx},\nu} + b(t,x_\nu,u_\nu,u_{x,\nu}) & (\nu = 1,\dots,n;\ ' = \frac{d}{dt}) \\ u_o = u_1 + h\varphi(\alpha(t),u_1)\ ,\ u_{n+1} = u_n + h\varphi(\beta(t),u_n) \end{cases}$$

mit $u_{x,\nu} = h^{-1}(u_{\nu+1}-u_\nu)$ und $u_{\overline{xx},\nu} = h^{-2}(u_{\nu+1}+u_{\nu-1}-2u_\nu)$. Unter geeigneten Voraussetzungen über a, b, α, β und φ hat (1_n) nach Sätzen von Mawhin u.a. eine ω-periodische Lösung u_n, und die Folge der bezüglich x interpolierten Funktionen u_n hat eine Teilfolge, die gegen eine klassische ω-periodische Lösung von (1) konvergiert. Es werden Voraussetzungen aus einer von H.Knolle als Dissertation an der GH Paderborn eingereichten Arbeit diskutiert.

W. EBERHARD: Stone-reguläre Eigenwertprobleme

Es werden Eigenwertprobleme betrachtet, die von der linearen Differentialgleichung $m(y) = \lambda\ n(y)$; $m(y) = y^{(n)} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)y^{(n-\nu)}$, $n(y) = y^{(p)} + \sum_{\mu=1}^{p} g_\mu(x)y^{(p-\mu)}$ $(0\leq p\leq n-1)$ und von λ-abhängigen Randbedingungen erzeugt werden. Über eine asymptotische Entwicklung eines Fundamentalsystems der Gleichung $m(y) = \lambda n(y)$ ist es möglich, eine Übertragung der Theorie Stone-regulärer Probleme (vgl. Benzinger, J.Diff.Equ.7(1970)) im Fall $n(y) = y$ auf Probleme obigen Typs zu erreichen. Es werden Abschätzungen für die Eigenwerte hergeleitet sowie die Entwicklungen nach Eigenfunktionen untersucht. Dabei wird sowohl ein Äquikonvergenzsatz für die Rieszschen Mittel als auch ein Satz über die Konvergenz im L^p-Mittel bei solchen Entwicklungen bewiesen.

M. ESSÉN: On ψ-sequences and the growth of small subharmonic functions

Let $\psi : [1,\infty) \to \underline{R}^+$ be an increasing function tending to infinity. Let $\{c_k\}_1^\infty$ be a non-negative, increasing and convex sequence in $\underline{R}$ tending to infinity. We define

$$\delta_k = \begin{cases} (\Delta^2 c_k)/c_k , & c_k > 0 , \\ 0 , & c_k = 0 . \end{cases}$$

If $c_k = \underline{O}(\psi(2^k))$, $k \to \infty$, we say that $\{\delta_k\}_1^\infty$ is a ψ-sequence. If ψ is given, what can we say about a ψ-sequence $\{\delta_k\}_1^\infty$?

Theorem. $\{\delta_k\}_1^\infty$ is a ψ-sequence with

(1) $\psi(r) = \log r$ iff $\sum k\, \delta_k < \infty$.

(2) $\psi(r) = (\log r)^2$; then $\sum \delta_k^\lambda < \infty$, $\lambda > 1/2$.

(3) $\psi(r) = (\log r)^\alpha, \alpha > 2$; then $\sum_1^n \delta_k \leq (\alpha-1) \log n + \underline{O}(1)$.

This problem arose in the following context.
Let u be a subharmonic function in $\mathbb{C}$ of order zero, and let $B(r) = \max_\theta u(r e^{i\theta})$. What can we say about the set

$$E(\varepsilon) = \{z: u(z) < (1-\varepsilon) B(|z|)\} \ ?$$

Since u is of order 0, the interesting case is when $\log \psi(r)/\log r \to 0$, $r \to \infty$.
Without loss of generality, we can assume that $u(z) = \int \log |1-z/\zeta|\, d\mu(\zeta)$, that $n(r) = \mu\{|z| < r\}$ and that $n(1) = 0$. It is known that $N(r) = \int_0^r n(t)/t\, dt \leq B(r)$. Define $b_k = n(2^k)$ and $c_k = \sum_1^k b_j \leq$ const.$N(2^k)$. If $B(r) = O(\psi(r))$, $r \to \infty$, we have $c_k = O(\psi(2^k))$, $k \to \infty$ and we can apply the theorem.
If $E_k = E \cap \{2^k = |z| < 2^{k+1}\}$ and $A_k = \{\log(2^{k+2}/\text{cap } E_k)\}^{-1}$, we obtain

(1') $\sum k\, A_k < \infty$.

This is equivalent to the Wiener criterion: The set $E(\varepsilon)$ is thin at infinity.

(2') $\sum A_k^{\lambda} < \infty$, $\lambda > 1/2$.
The exceptional set $E(\varepsilon)$ is not thin at infinity, but still rather small.

(3') $\sum_1^n A_k \leqq \text{const.}\ \varepsilon^{-1} \log n$, $n \to \infty$.

Here in the case $\alpha > 2$, other phenomena appear: In a number of annuli, we might have

$$u(r\, e^{i\theta}) \approx \text{const.} \sqrt{r}\ \cos((\theta-\theta_o)\tfrac{1}{2}),$$

i.e. $E(\varepsilon)$ contains almost the whole annulus.
The above is joint work with W.K.Hayman and A.Huber.

G. FREILING: Ein Äquikonvergenzsatz für eine Klasse von singulären Differentialoperatoren

Es werden lineare nicht-selbstadjungierte singuläre Rand-Eigenwertprobleme vom Typ (1) $M\ y = \lambda\ N\ y$ betrachtet. Dabei seien M bzw. N Differentialoperatoren, die von Differentialausdrücken der Ordnung n bzw. p mit $n - p = 2\varkappa > 0$ in Teilräumen von $L_2(0,\infty)$ erzeugt werden.
Unter Verwendung von asymptotischen Abschätzungen für ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $m(y) = \lambda\ n(y)$ bezüglich $|\lambda| \to \infty$ und $\varkappa \to \infty$ wird gezeigt, daß das Problem (1) eine beschränkte, höchstens abzählbare Menge von Eigenwerten besitzt und daß das kontinuierliche Spektrum die ganze positive (im Fall "$\varkappa$ gerade") bzw. negative (im Fall "$\varkappa$ ungerade") Halbachse ausfüllt. Ferner wird bewiesen, daß die durch (1) erzeugte Klasse von Integraltransformationen sich für eine in $L(0,\infty)$ dichte Menge von Funktionen äquikonvergent mit dem gewöhnlichen Fourier-Integral verhält.

M. GIERTZ: On commuting differential expressions

This talk concerns real, ordinary, linear differential expressions (DEs) of the form $P = \sum_{k=0}^{n} p_k\ D^k$, acting on sufficiently differentiable functions on some interval I of the real line, and with $p_k \in C^\infty(I)$ (k=1,...,n) and $p_n > 0$. For such expressions it is true that

1. If some polynomial in a DE P commutes with some polynomial in a DE Q, then P and Q commute.
2. If a DE P commutes with a first order DE Q, then P, and also every DE which commutes with P, is a polynomial in Q.
3. There exists a DE Q of order m which commutes with a given DE P of order n if and only if the coefficients $p_o, p_1, \dots, p_n$

of P satisfy n-1 explicitly stated differential equations, for some values of n+m-1 constants $a_1, a_2, \ldots, a_{n+m-1}$ which appear in these equations. If they do, then all DEs of order m which commute with P are of the form

$$Q = a_o(Q_m + a_1 Q_{m-1} + a_2 Q_{m-2} + \ldots + a_{m-1} Q_1 + a_m) ,$$

where each Q_k is a DE of order k which is uniquely determined by P, and where the constants a_k are such that the above n-1 equations are satisfied.

There is a conjecture concerning the form of the terms Q_k and a detailed analysis of the case n = 2 , m = 3.

W. HAHN: Differentialgleichungen für Orthogonalpolynome

Die von x und dem ganzzahlig variierenden Parameter α abhängende Funktion $y_\alpha(x)$ genüge einer Differentialgleichung (Dgl) $L_\alpha(y) := p_{o\alpha}(x)\, y_\alpha^{(k)} + p_{1\alpha}(x)\, y_\alpha^{(k-1)} + \ldots + p_{k\alpha}(x)\, y_\alpha = 0$ und gleichzeitig der Differenzengleichung $y_\alpha(x) = a_\alpha(x)\, y_{\alpha-1}(x) + b_\alpha(x)\, y_{\alpha-2}(x)$, wobei die $p_{i\alpha}(x)$, $a_\alpha(x)$, $b_\alpha(x)$ Polynome beschränkter Grade in x sind.

Ist $\alpha \in \mathbb{N}$, $a_\alpha(x)$ linear reell, $b_\alpha(x) = b_\alpha < 0$, so erklärt die Formel eine Kette $\{y_\alpha(x)\}$ von Orthogonalpolynomen.

Es gelten folgende Aussagen:

1. Die echten Singularitäten der Dgl und die dazu gehörenden Substitutionen sind von α unabhängig.

2. Man kann jede Lösung $w_\alpha(x)$ der Dgl als Linearkombination aus zwei Lösungen $u_\alpha(x)$, $v_\alpha(x)$ mit von α unabhängigen Koeffizienten darstellen. Wenn dabei nur Lösungen $w_\alpha = f\, u_\alpha$ oder $w_\alpha = g\, v_\alpha$ (aber nicht $f\, u_\alpha + g\, v_\alpha$) auftreten, ist k = 2r gerade, und es gibt ein Fundamentalsystem der Gestalt $f_i(x)\, u_\alpha(x)$, $f_i(x)\, v_\alpha(x)$, $i=1,\ldots,r$.

Hat die Dgl Polynomlösungen, so ist k = 2 oder k = 4, und im zweiten Fall gibt es ein Fundamentalsystem der Form $\varphi_1 \varphi_{\alpha 1}$, $\varphi_1 \varphi_{\alpha 2}$, $\varphi_2 \varphi_{\alpha 1}$, $\varphi_2 \varphi_{\alpha 2}$, wobei φ_i und $\varphi_{\alpha i}$ Dgln zweiter Ordnung genügen.

Es wird vermutet, daß es keine weiteren Dgln $L_\alpha(y) = 0$ mit Polynomlösungen gibt.

O. HÁJEK: Generalised solutions - Filippov and Hermes

For differential equations $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}^n$, with possibly discontinuos f, one has the concepts of classical solutions, Carathéodory solutions, and Filippov solutions.
A mapping $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ is a Hermes solution (new concept) if there exist "inner perturbations" $p_k : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ with $p_k \to 0$ uniformly, and Carathéodory solutions $x_k : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ of

$$\dot{x} = f(x + p_k(t)) ,$$

such that $x_k \to x$ uniformly.
With obvious notation, one has $C \subset H \supset F$; however even $C \cap F = \emptyset$ is possible, and it seems doubtful that $C \cup F = H$.
(In a sense, C is the "natural" concept. A lot is known about F, and very little about H.)
We present an easily verifiable condition for $H = F$, a weak form of piecewise continuity. The main result is a sufficient condition for "stability with respect to measurement" (if x_k are as above and $x_k(0) \to x_o$, then necessarily $x_k \to x$ with x a Carathéodory solution; Hermes' concept; it implies $C = F = H$). It is applicable to the discontinuous equations that arise from time-optimal feedback constrictions for linear control systems.

O. HÁJEK: The generalised inverse, and applications in control theory

The so-called Moore-Penrose inverse of a rectangular matrix is briefly described, including the formula

$$A^{\dagger} = A^{*} \lim_{\varepsilon \to 0+} A A^{*} (\varepsilon I + A A^{*})^{-2} .$$

The concept is then extended to linear mappings between Hilbert spaces, and applied to standard linear control problems: minimisation of quadratic cost, optimal tracking.

U. KIRCHGRABER: Über einige Aspekte der Mittelwertmethode

Ziel dieses Vortrages ist es, zwei Fehlerabschätzungen für die Mittelwertmethode zu diskutieren. Betrachten wir ein System der Form

$$(1) \quad \dot{\varphi} = \omega(a) + \varepsilon R(\varphi, a) , \quad \dot{a} = \varepsilon T(\varphi, a) \qquad (\dot{} = \tfrac{d}{dt}) ,$$

wobei ω , R , T in einem geeigneten Gebiet definiert, genügend regulär und 2π-periodisch in den Komponenten von φ sind. Überdies sei die Fourier-Entwicklung $T = \overline{T}(a) + \sum' A_n(a)\, e^{i(n,\varphi)}$ endlich. Neben dem System (1) betrachten wir das gemittelte System

(2) $a' = \overline{T}(a) \qquad (\ ' = \frac{d}{d\tau} , \ \tau = \varepsilon t \ ).$

Falls in der obigen Summe mit einer positiven Konstante d

$$|(n,\omega)| \geqq d$$

gilt, so ist (1) vermöge der Transformation

$$\varphi = \tilde{\varphi} \ , \quad a = \tilde{a} - \sum{}' \ i(n,\omega)^{-1} A_n e^{i(n,\varphi)}$$

äquivalent mit

(3) $\dot{\tilde{\varphi}} = \omega(\tilde{a}) + \varepsilon \overline{R}(\tilde{\varphi},\tilde{a}) + O(\varepsilon^2) \ , \quad \dot{\tilde{a}} = \varepsilon \ \overline{T}(\tilde{a}) + O(\varepsilon^2) \ .$

Das Definitionsgebiet von (3) sei $\mathbb{R}^t \times \Delta$, $\mathbb{R}^r \supset \Delta$ beschränkt.

Sei $z(\tau,\xi)$ die Lösung von (2) mit $z(0,\xi) = \xi$; sei ferner $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{a}(t)$ eine Lösung von (1). Dann ist es unser Ziel, $\tilde{a}(t) - z(\varepsilon t, \tilde{a}(0))$ abzuschätzen.

<u>Satz 1.</u>

(i) Sei $A \in \Delta$ mit $\overline{T}(A) = 0$.

(ii) $B = \partial\overline{T}(A)/\partial a$ sei asymptotisch stabil.

(iii) Δ sei Einzugsbereich von A bezüglich (2).

Dann gibt es zu $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{a}(t)$ positive Konstanten ε_o, k derart, daß für $\varepsilon \in (0,\varepsilon_o)$ $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{a}(t)$ in $\mathbb{R}^+$ existiert, wobei $|\tilde{a}(t) - z(\varepsilon t,\tilde{a}(0))| \leqq k\varepsilon$ für $t \in \mathbb{R}^+$.

Komplizierter Beweis von W.Eckhaus, J.Math.Anal.Appl.<u>49</u>, 1975.

Einfacher Beweis: Zweimalige Anwendung des folgenden Lemmas.

<u>Lemma.</u> Seien $x(t,\xi)$ bzw. $y(t,\xi)$ Lösungen von $\dot{x} = f(x) + g(t)$ bzw. $\dot{y} = f(y)$. Es gelte $|g(t)| \leqq M$, $|y(t,\xi_1) - y(t,\xi_2)| \leqq \omega(t) \cdot |\xi_1 - \xi_2|$. Dann ist $|y(t,\xi) - x(t,\xi)| \leqq M \int_0^t \omega(s)ds$ (vgl. U.Kirchgraber, J.Reine Angew.Math.<u>288</u>, 1976).

Aus einer Lipschitz-Bedingung für $\overline{T}$ folgt $|z(\tau,\xi_1) - z(\tau,\xi_2)| \leqq e^{\sigma\tau}|\xi_1 - \xi_2|$. Für $|\xi_i - A| < R$, R genügend klein, gilt wegen (i), (iii) $|z(\tau,\xi_1) - z(\tau,\xi_2)| \leqq e^{-\sigma\tau}|\xi_1 - \xi_2|$. Wegen (iii) gibt es ein $L > 0$, so daß $|z(\tau,A) - A| < R/2$ für $\tau > L$. Nun wendet man das Lemma an.

Betrachten wir den Fall, daß die Nicht-Resonanz-Bedingung $|(n,\omega)| \geqq d > 0$ für genau ein $n = m$ verletzt ist: $N(a) = (m,\omega)$ hat Nullstellen in Δ. Sei $\varphi(t)$, $a(t)$ Lösung von (1) mit $N(a(0)) = 0$. Dann approximiert $z(\varepsilon t, a(0))$ die Funktion $a(t)$ nur unter zusätzlichen Bedingungen. Sei $\lambda(\varphi,a) = \frac{\partial N}{\partial a} T$. Dann gilt:

<u>Satz 2.</u>

(i) $z(\tau,a(0))$ existiere auf $[0,L]$.

(ii) Es gebe ein $\overline{L} \in [0,L]$, so daß in der ϱ-Umgebung U_1 von $B_1 = \{z(\tau,a(0)) : 0 \leqq \tau \leqq \overline{L}\}$ die Ungleichung $\lambda(\varphi,a) \geqq d > 0$ gilt, in der ϱ-Umgebung U_2 von $B_2 = \{z(\tau,a(0)) : \overline{L} \leqq \tau \leqq L\}$ die Ungleichung $N(a) \geqq d > 0$.

Dann existiert $\varphi(t)$, $a(t)$ auf $[0,L/\varepsilon]$, ε genügend klein, und es gilt $a(t)-z(\varepsilon t,a(0)) = O(\sqrt{\varepsilon})$.

R. LEMMERT: Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen in konvexen Teilmengen eines Banach-Raumes

In Verallgemeinerung von Resultaten von Schmitt-Volkmann, Lemmert-Volkmann u.a. wird ein Invarianzsatz für Randwertprobleme dritter Art der Form

$$a(t)\, u'' + f(t,u,u') = 0$$
$$a_o\, u(0) - b_o\, u'(0) = u_o$$
$$a_1\, u(1) + b_1\, u'(1) = u_1$$

angegeben. Da $a_o = 1$, $b_o = a_1 = b_1 = 0$, $u_1 = 0$ zugelassen ist, werden durch diesen Satz auch Anfangswertprobleme erfaßt.

J. MAWHIN: Landesman-Lazer's type periodic problems for ordinary differential equations with one-sided growth restriction

Let $I = [0,1]$, $f: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfy the Carathéodory conditions. Using a generalized Leray-Schauder's type continuation theorem (see: Mawhin, J.Diff.Equ. 12 (1972) or Gaines-Mawhin, Springer Lecture Notes 568 (1977)), comparison theorem and Fatou's lemma, one proves the following

Theorem. Assume:

1. There exists a $\delta \in [0,1]$ and non-negative functions $\alpha, \beta \in L^1(I)$ such that, for all $x \in \mathbb{R}^n$ and almost all $t \in I$,
$$(x,f(t,x)) \leqq \alpha(t)\, |x|^{1+\delta} + \beta(t)\, |x|$$
($(.,.)$ denotes the inner product in $\mathbb{R}^n$ and $|\,.\,|$ the Euclidian norm)

2. $$\int_0^1 \limsup_{|x| \to \infty} \frac{(x,f(t,x))}{|x|^{1+\delta}}\, dt < 0 .$$

Then the problem
$$x'(t) = f(t,x(t)) , \quad x(0) = x(1)$$
has at least one solution.

The following special cases, among others, are of interest:

(i) $\delta = 0$, $n = 1$. Then (1) becomes
$$f(t,x) \leqq \beta(t) \quad (x \geqq 0) , \quad f(t,x) \geqq -\beta(t) \quad (x \leqq 0) ,$$
and (2) becomes
$$\int_0^1 \limsup_{x \to \infty} f(t,x)\, dt < 0 < \int_0^1 \liminf_{x \to -\infty} f(t,x)\, dt$$
so that one gets a Landesman-Lazer's type result with only one-

sided growth restrictions.

(ii) $\delta = 1$, $n = 1$. Then (1) becomes

$$f(t,x) \leqq \alpha(t)\, x + \beta(t) \quad (x \geqq 0)\ , \quad f(t,x) \geqq -\alpha(t)x - \beta(t) \quad (x \leqq 0)\ ,$$

and (2) becomes

$$\int_0^1 \limsup_{x \to \pm\infty} x^{-1} f(t,x) \; dt < 0 \quad .$$

In particular, for the scalar linear equation

(*) $\quad x' = a(t)\, x + b(t)$

this reduces to

$$\int_0^1 a(t)\; dt < 0 \ .$$

(The other part $\int_0^1 a(t)\; dt > 0$ of this necessary and sufficient condition for the existence of a 1-periodic solution to (*) for any b is obtained by changing t into 1-t.)

(iii) $f(t,x) = h(t,x) + g(t)$ with $h(t,\lambda x) = \lambda^{\delta} h(t,x)$ for any $\lambda \geqq 0$. Then (1) is satisfied, and (2) becomes

$$\int_0^1 \sup_{|y|=1} (y, h(t,y))\; dt < 0 \ .$$

If $h(t,x) = A(t)\, x$, this reduces to the condition $|\, Y(1) \,| < 1$ where $Y(t)$ is the fundamental principal matrix of $x' = A(t)\, x$.

M. PACHTER: Conditions for arbitrary-interval null-controllability and the continuity of the minimum-time function

We consider the autonomous linear control system in $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{dx}{dt} = A\, x(t) + B\, u(t) \ ,$$

where $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, without however, assuming that the origin in $\mathbb{R}^m$ is interior to the convex hull of Ω. Attention is given to null-controllability (controllability of each point in some neighbourhood of the origin) on the time interval $[0,t]$ (where $t > 0$ but is otherwise arbitrary) and we discuss the continuity of the minimum time function.

K.J. PALMER: On the Hopf bifurcation

Consider the ordinary differential equation $x' = f(x,\mu)$, $x \in \mathbb{R}^2$ depending on the parameter μ and satisfying the conditions

(i) $\quad$ f is C^4 and $f(0,\mu) = 0$

(ii) $\quad f_x(0,\mu)$ has eigenvalues $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\,\omega(\mu)$, $\overline{\lambda(\mu)}$ such that $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) \neq 0$ and $\alpha'(0) \neq 0$.

Let us explain a further condition: The differential equation can be transformed into the form

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$x_1' = \alpha(\mu)\, x_1 - \omega(\mu)\, x_2 - (x_1^2+x_2^2)(\beta_1(\mu)x_1+\beta_2(\mu)x_2)+O(|x|^4)$$
$$x_2' = \omega(\mu)\, x_1 + \alpha(\mu)\, x_2 - (x_1^2+x_2^2)(-\beta_2(\mu)x_1+\beta_1(\mu)x_2)+O(|x|^4)$$

This can then be rewritten as (+)

$$x_1' = \alpha'(0)\mu\, x_1 - (\omega(0)+\omega'(0)\mu)\, x_2 - (x_1^2+x_2^2)(\beta_1(0)x_1+\beta_2(0)x_2)$$
$$+ O(\mu^2|x|) + O(\mu|x|^3) + O(|x|^4)$$

$$x_2' = (\omega(0)+\omega'(0)\mu)\, x_1 + \alpha'(0)\mu\, x_2 - (x_1^2+x_2^2)(\beta_1(0)x_2-\beta_2(0)x_1)$$
$$+ \dots$$

Our condition (iii) is that $\beta_1(0) \neq 0$.

We prove then the following

<u>Theorem</u>.

There exists a real function $\sigma(\mu)$ continuous in $|\mu| < \mu_o$ and a function $H(x_1,x_2,\mu) = (H_1(x_1,x_2,\mu),H_2(x_1,x_2,\mu))$ continuous in $|x| < x_o$, $0 < \mu < \mu_o$ such that $\sigma(0) = 1$, $H(0,0,\mu) = (0,0)$, H is a homeomorphism for each fixed μ, and if $x_1(t),x_2(t)$ is a solution of (+) then $H_1(x_1(\sigma(\mu)t), x_2(\sigma(\mu)t),\mu),H_2(x_1(\sigma(\mu)t),x_2(\sigma(\mu)t),\mu)$ is a solution of

$$x_1' = \alpha'(0)\mu\, x_1 - (\omega(0)+\omega'(0)\mu)x_2 - (x_1^2+x_2^2)(\beta_1(0)x_1+\beta_2(0)x_2)$$
$$x_2' = (\omega(0)+\omega'(0)\mu)x_1+\alpha'(0)\mu\, x_2 - (x_1^2+x_2^2)(-\beta_2(0)x_1+\beta_1(0)x_2).$$

The proof of the theorem rests on a generalization of the linearization theorem of Hartman.

It can also ba generalized to the case when $x \in \mathbb{R}^n$ provided we assume that, apart from $\lambda(0)$, $\overline{\lambda(0)}$ the eigenvalues of $f_x(0,0)$ have no zero real parts.

H.O. PEITGEN: <u>Continua for nonlinear eigenvalue problems in cones</u>

Let P be a cone in a Banach space and let $F: P \times (a,b) \rightarrow P$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ be a continuous operator which is condensing on bounded sets. We give a set of alternative conditions (some of which are asymptotic) which guarantee that for any $\varepsilon > 0$ there is a continuum C_ε of non-trivial solutions for the problem $F(x,\lambda)=x$, $x \in P$ and $\lambda \in (a,b)$ such that the projection of C_ε onto the λ-axis fills the entire interval $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$. Some of the conditions are related to R.E.L.Turner's, others are connected

with recent work of R.D.Nussbaum. The proofs rely on the generalized fixed point index theory due to R.D.Nussbaum and J.Eells-G.Fournier and on the generalized Lefschetz fixed point theory due to J.Leray and A.Granas.
As an application the problem of finding a continuum of periodic solutions for the functional differential equation $\dot{x}(t) = -\lambda f(x(t-1))$ is considered.
Parts of the results are from an invited paper with G.Fournier which is to be published in Ann.Scuola Norm.Sup. in honour of J.Leray.

L. REICH: Zur Abschätzung der Wachstumsordnung in der Fuchsschen Theorie

Vorgelegt sei das lineare Differentialsystem

$$z\,\dot{w} = A(z)\,w\ ,\ w = {}^t(w_1, \ldots , w_n)$$

mit einer Matrix $A(z) = (a_{ik}(z))$, deren Elemente in $z = 0$ meromorph sind. $a_{ik}(z)$ habe in $z = 0$ einen Pol der Ordnung l_{ik}, wobei $l_{ik} < 0$ Nullstelle der Ordnung $-l_{ik}$ bedeutet.
Es sei $\varphi := \text{Max}\ (l_{11},\ldots,l_{nn},\frac{1}{2}(l_{12}+l_{21}),\ldots,\frac{1}{3}(l_{12}+l_{23}+l_{31}),\ldots, \sum \varepsilon_{(i,\gamma)} l_{(i,\gamma)} / \sum \varepsilon_{(i,\gamma)})$, wobei $\varepsilon_{(i,\gamma)} = \pm 1$ nach gewissen Vorschriften bestimmt wird.

a) Es sei $\varphi > 0$. Dann gilt für jede Lösung w des Systems in jedem Winkelraum mit Spitze $z = 0$: $\|w\| = \exp\ (M|z|^{-\varphi})$, M hängt vom Winkelraum ab.

b) Falls $\varphi = 0$, so liegt eine Stelle der Bestimmtheit vor. (Falls $l_{ik} = -\infty$ ist, dann ist eine Erweiterung der Definition von φ nötig.)

φ ergibt sich aus dem Studium des linearen Optimierungsproblems $u = \text{Min!}$ unter den Nebenbedingungen $l_{ij} + x_i - x_j \leq u$, $i,j=1,\ldots, n$.
Durch das vorliegende Ergebnis werden Untersuchungen von Perron und Bieberbach weitergeführt.

R.REISSIG: Bemerkungen zu einigen nicht-autonomen Differentialgleichungen 2. Ordnung

1. Für die Differentialgleichung

$$(a(t)\ x')' + f(t,x) = q(t)$$

werden Sätze über die Existenz T-periodischer Lösungen von S. Chang und J.Mawhin-K.Schmitt durch Anwendung der Leray-Schauder-Fixpunkttechnik verallgemeinert. Unter den Voraussetzungen

$$\int_0^T q(t)\,dt = 0\,,$$

$$0 < a_o \leqq a(t) \leqq a_1 \quad (\Theta = \int_0^T (dt/a(t)) \leqq T/a_o)$$

$$f(t+T,x) \equiv f(t,x)$$

wird bewiesen: Wenn positive Konstanten μ und k derart existieren, daß

$$\int_0^T f(t,-x(t))\,dt \quad \int_0^T f(t,x(t))\,dt < 0 \text{ für } \min |x(t)| \geqq \mu$$

und

$$|f(t,x)| \leqq k/(T\,\Theta) \quad \text{für } |x| \leqq h = 2\|x^*\| + \mu + k\,,$$

dann existiert eine periodische Lösung $x(t)$ mit der Maximum-Norm $\|x\| \leqq h$. Hierbei ist $x^*(t)$ die periodische Lösung der linearen Gleichung $(a(t)\,x')' = q(t)$ mit dem Anfangswert 0; $\|x^*\|$ kann durch $\max x^*(t) - \min x^*(t)$ ersetzt werden.

Die erste Bedingung für f kann durch $x\,f(t,x) \geqq 0 \quad (|x| \geqq \mu)$ ersetzt werden und beide Bedingungen durch $x\,f(t,x) \leqq 0$.

Zum Beweis substituiert man eine neue unabhängige Variable τ: $dx/d\tau = a(t)\,dx/dt$; ferner betrachtet man die Vergleichsdifferentialgleichung

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\,a\circ t(\tau)\,[\,(1-\lambda)\,f(t(\tau),-x) - (1+\lambda)\,f(t(\tau),x)]$$
$$+\,\lambda\,a\circ t(\tau)\,q\circ t(\tau)\,,\quad 0 \leqq \lambda \leqq 1\,.$$

2. Für die Differentialgleichung

$$x'' + f(x)\,x' + g(x) = e(t) \equiv e(t+2\pi)$$

wird ein Satz von Ezeilo über die Existenz 2π- periodischer Lösungen mit dem integralen Mittelwert 0 diskutiert. Der Satz beruht auf den Voraussetzungen

$$\int_0^{2\pi} e(t)\,dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} g\circ\varphi(t)\,dt = 0$$

(für jede 2π-periodische Funktion der Klasse C^1 mit dem Mittelwert 0)

$$f(x) \geqq a > 0 \text{ für alle } x.$$

Es läßt sich zeigen, daß die Bedingung für $g(x)$ auf Linearität hinausläuft: $g(x) = b\,x$; dann kann man aber bekannte Sätze heranziehen, um die Behauptung zu verifizieren.

E. ROXIN: <u>Stroboskopische Strategien beim Differentialspiel mit der Wellengleichung und gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen</u>

Das Differentialspiel sei definiert durch

$$w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t) \quad \text{in } x \in [0,1]\,,\ t \geqq 0$$

$$w(x,0) = \varphi(x) \ , \quad w_t(x,0) = \psi(x) \quad \text{(vorgegeben)}$$
$$w(0,t) = u(t) \ , \quad w(1,t) = v(t) \quad \text{(Randkontrollen)}$$
$$|u(t)| \leqq M \ , \ |v(t)| \leqq k\,M \quad (M > 0 \ , \ 0 < k < 1) \ ;$$

Endbedingung:

$$W(T) = \int_0^1 w(x,T)\,dx = 1 \ .$$

Auszahlungsfunktional:

$$J[u,v] = T \quad \text{(zeitoptimal)} \ ;$$

Spieler " u " soll T minimieren, Spieler " v " soll T maximieren.

Bemerkung: T hängt nichtlinear von u , v ab; das Spiel ist daher nicht-trivial.

Annahme: $W(0) < 1$, Spieler " u " will $W(t)$ möglichst schnell wachsen lassen. Im Falle $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ hat man die optimalen Steuerungen:

$$\begin{array}{llll} u(t) = & M \text{ in } [T-1,T] & v(t) = & -kM \text{ in } [T-1,T] \\ & -M \text{ in } [T-2,T-1] & & kM \text{ in } [T-2,T-1] \\ & M \text{ in } [T-3,T-2] & & -kM \text{ in } [T-3,T-2] \\ & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Dabei darf " u " " open loop " spielen, " v " jedoch nicht. Damit ein Nash-Gleichgewicht besteht, muß " v " z.B. eine (nach Hájek) "stroboskopische" Strategie spielen: $v(t) = -k\,u(t)$. Falls $\varphi(x)$, $\psi(x)$ von Null verschieden sind, so wird ein vorgegebenes $W_0(t) \equiv W_0(t+1)$ überlagert; damit läßt sich die optimale Zeit T errechnen.

Die gleiche Methode kann im Differentialspiel

$$\dot{x} = A\,x + B\,u + C\,v$$

angewandt werden, mit entsprechenden Einschränkungen für u , v , da ja

$$p\;x(T) = 1 \ ,$$
$$p\;x(T) = \int_0^T p\,\Phi(T-\tau)Bu(\tau)\,d\tau + \int_0^T p\,\Phi(T-\tau)Cv(\tau)\,d\tau + p\,\Phi(T)\,x_0$$

wird; " u " muß das erste Integral maximieren, " v " muß das zweite Integral minimieren. Die Angabe der optimalen Strategien hängt dann noch von den zulässigen Werten von $|u|$, $|v|$ und von B , C ab.

H. RÜSSMANN: <u>Über die Existenz quasiperiodischer Lösungen bei Hamiltonschen Differentialgleichungen</u>

Gegeben sei ein Hamilton-System

$$\dot{x} = H_y \ , \ \dot{u} = H_v \ , \quad x = (x_1,\ldots,x_m) \ ; \ u = (u_1,\ldots,u_s)$$
$$\dot{y} = -H_x \ , \ \dot{v} = -H_u \ , \quad y = (y_1,\ldots,y_m) \ , \ v = (v_1,\ldots,v_s) \ ,$$

wobei H die Form

$$H = H(x,y,u,v,\varepsilon) = K(y,u,v) + \varepsilon\, L(x,y,u,v,\varepsilon)$$

hat, 2π-periodisch in $x_1,\dots,x_m$ und reell analytisch ist für $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in D \subset \mathbb{R}^m$ offen , u , $v \in U(0) \subset \mathbb{R}^s$, $\varepsilon \in U(0) \subset \mathbb{R}$. Für alle $y \in D$ gelte $K_u(y,0,0) = K_v(y,0,0) = 0$.

Besitzt die Matrix

$$\begin{pmatrix} K_{vu}(y,0,0) & K_{vv}(y,0,0) \\ -K_{uu}(y,0,0) & -K_{uv}(y,0,0) \end{pmatrix}$$

für alle $y \in D$ ein Paar rein imaginärer Eigenwerte $\pm\lambda(y) \in i\mathbb{R}$, während alle anderen Eigenwerte von Null verschiedene Realteile haben, und gilt

$$\det \begin{pmatrix} K_{yy}(y,0,0) & K_y(y,0,0) \\ {}_{y}(y) & (y) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall\, y \in D ,$$

so hat das betrachtete Hamilton-System quasiperiodische Lösungen.

Dies ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Moser-Graff (1974).

K. SCHMITT: <u>Extremale Lösungen für Systeme von linearen Differentialgleichungen</u>

Betrachtet wird das System (1) $x'' + A(t)\,x = 0$ mit Randbedingungen $x(0) = 0 = x(T)$, wo $A(t)$ eine stetige $n\times n$-Matrixfunktion ist. Es wird angenommen, daß $A(t)(K) \subset K$, wo K ein abgeschlossener Kegel im $\mathbb{R}^n$ ist, dessen Inneres nicht leer ist. Mit Hilfe der Theorie kompakter positiver Operatoren (im Sinne von Krein-Rutman, Krasnoselskii) wird gezeigt, daß das Problem (1) eine nicht-triviale Lösung hat, so daß $x:[0,T] \longrightarrow K$, falls T der erste Konjugiertheitspunkt zu 0 ist.
Gibt es umgekehrt eine solche Lösung und ist $A(t_0)$, $0 \leq t_0 < T$, irreduzibel, so ist T der erste Konjugiertheitspunkt zu 0. Jede andere Lösung des Problems (1) ist ein konstantes Vielfaches dieser Lösung. Die Aussagen werden benutzt, um für Systeme der obigen Art Vergleichssätze aufzustellen. Ferner werden Verzweigungsprobleme für nichtlineare Aufgabenstellungen studiert.
Für Systeme elliptischer Gleichungen gelten ähnliche Sätze.

U. STAUDE: <u>Zur Anzahl periodischer Lösungen der Liénard-Gleichung</u>

Für das der Liénardschen Gleichung äquivalente System

$$\dot{x} = y - F(x) \;,\; \dot{y} = -x$$

gilt folgender Eindeutigkeitssatz:
Erfüllt $F(x)$ die Bedingungen

a) $F(0) = 0$

b) $F(x) < F(-x)$, $0 < x < a$

c) $F(x) > F(-x)$, $x > a$

d) $F'(x) > (x^2-a^2)^{-1} [F(\sqrt{x^2+a^2}) - F(a)] x$, $|x|>a$,

so besitzt das System höchstens eine nicht-triviale periodische Lösung.

Die Menge $\{x > 0: F(x) = F(-x)\}$ bestehe nur aus isolierten Punkten; man bezeichnet solche Punkte als Knotenpunkte. Die Anzahl der Knotenpunkte sei N. Für die Anzahl n der nicht-trivialen periodischen Lösungen der Liénardschen Gleichung wird vermutet, daß $n \leq N$ gilt.

Die Vermutung ist für $N = 0$ richtig: $n = 0$.

Bei allen bisher bekannten Eindeutigkeitssätzen ($n = 1$) hat man $N = 1$. Es lassen sich Beispiele für $n = 0$, $N = 2$ konstruieren. In den Sätzen von Rychkov gilt $n = N = 2$ bzw. $n = N = m$, während bei Duff-Levinson $n = N = 3$ ist. Für den Fall $F(x) = \sin(x+\theta) - \sin\theta$, $|\theta| < \pi/2$ hat Rychkov nachgewiesen, daß es abzählbar unendlich viele periodische Lösungen gibt. Dabei hat jeder einer solchen Lösung entsprechende Zyklus einen Knotenpunkt mehr als der vorhergehende im Innengebiet.

E. THOMAS: Decoupling and reduction in Hamiltonian systems

We consider the Hamiltonian system arising from a pair of coupled non-linear oscillators. The problem is to examine the stability of certain periodic solutions (the normal modes) in the presence of high energy and strong non-linearity. A method is described by which the equations governing the eigenvalues of the Poincaré map of such a solution can be decoupled. It is then shown that one of the remainig 2^{nd} order, linear, periodic equations completely governs the behavior of the eigenvalues. A study of the stability chart of this equation, together with results of Arnold, Moser and Rüssmann on normal forms, then yields a fairly complete description of the stability behavior of the periodic solution. Let h denote the energy in the system and $\varepsilon > 0$ a parameter governing the non-linearity. Then there is a set E of measure 0 in $\mathbb{R}^1$ such that if $\varepsilon h \notin E$ the solution is iso-energetically stable, except for certain closed intervals where the solution is hyperbolic unstable. (results obtained in joint work with G.Pecelli, C.U.N.Y.)

I. TROCH: Geometrische Eigenschaften von Ljapunov-Funktionen

Bei der Stabilitätsuntersuchung eines durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1.Ordnung beschriebenen Systems ist es vor allem im Hinblick auf praktische Anwendungen von großer Bedeutung, im Fall einer asymptotisch stabilen Ruhelage möglichst gute Abschätzungen für deren Einzugsbereich E anzugeben.
Im Anschluß an Arbeiten von LaSalle und Zubov sucht man zu diesem Zweck meist das Minimum α einer Ljapunov-Funktion V längs $L = \{x \mid \dot{V} = 0 \ , \ x \neq 0\}$ und erhält daraus das in E enthaltene Gebiet $G = \{x \mid \ V < \alpha\}$. Wählt man als Klasse von Ljapunov-Funktionen etwa Polynome, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}^k$ abhängen, so stellt sich einerseits die Frage nach einem bestmöglichen derartigen Gebiet (etwa im Sinn maximalen Volumens), andererseits kann man aber auch durch Bilden der Vereinigung aller Gebiete G(a) zu einer besseren Abschätzung von E gelangen (Frage nach der Einhüllenden der Ränder $\partial G(a)$). Beide Aufgabenstellungen weisen einen engen Zusammenhang mit der Frage nach der Anzahl der Berührpunkte von ∂G mit L auf, sowie mit dem Problem der stetigen Abhängigkeit dieser Berührpunkte von den Parametern.
Es wird zunächst gezeigt, daß die Frage nach einem Zusammenhang zwischen der Anzahl der Komponenten von L, der Anzahl der Berührpunkte und der Ordnung des Polynoms V nur für jede Differentialgleichung individuell lösbar ist, und zwar werden einfache Beispiele für Systeme 2.Ordnung angegeben, die bereits für quadratische Formen V jede beliebig vorgegebene Zahl von Komponenten von L, sowie beliebig vorgegebene Anzahlen von Berührpunkten je Komponente besitzen.
Ferner wird - ebenfalls durch Konstruktion eines Beispiels - eine Aussage von Shields und Storey (1975) folgenden Inhalts widerlegt: Gibt es eine Menge A von Parameterwerten a derart, daß für $a \in A$ ∂G die Menge L in mehr als zwei Punkten, die nicht radial symmetrisch sind, berührt, dann liegt der optimale Wert a ebenfalls in A. Dies trifft zwar für viele Systeme zu und ist Ursache für viele numerische Schwierigkeiten, sowohl bei der Bestimmung des optimalen Parameterwertes als auch bei der Ermittlung der Einhüllenden, muß jedoch nicht allgemein gelten.

P. VOLKMANN: Ausdehnung eines Satzes von Max Müller auf unendliche Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Satz: Sei $E = c_0$ oder $E = l_p$ $(1 \leqq p < +\infty)$. Für die stetigen Funktionen v, $w : [0,T] \to E$ gelte $v(t) \leqq w(t)$ (d.h. $v_n(t) \leqq w_n(t)$ für $n = 1,2,3,\ldots$). Die rechtsseitigen Ableitungen $D_+v(t)$, $D_+w(t)$, $0 \leqq t < T$, mögen im Sinne der Normtopologie existieren. Es sei

$$D = \{(t,z) : 0 \leqq t \leqq T,\ z \in E,\ v(t) \leqq z \leqq w(t)\}$$

und $f : D \to E$ eine stetige Funktion, so daß für $n = 1,2,3,\ldots$

$$D_+v_n(t) \leqq f_n(t,z) \text{ für } v(t) \leqq z \leqq w(t)\ ,\ z_n = v_n(t),\ 0 \leqq t < T$$

$$D_+w_n(t) \geqq f_n(t,z) \text{ für } v(t) \leqq z \leqq w(t)\ ,\ z_n = w_n(t),\ 0 \leqq t < T\ .$$

Schließlich sei $u_0 \in E$ mit $v(0) \leqq u_0 \leqq w(0)$.
Dann existiert eine in D verlaufende Lösung des Anfangswertproblems

$$u(0) = u_0\ ,\ u'(t) = f(t,u(t)) \qquad (0 \leqq t \leqq T)\ .$$

Für den Fall $E = \mathbb{R}^N$ geht vorstehender Satz auf M.Müller (1926) zurück. Der Beweis des Satzes kann durch Zurückführung auf ein Resultat von R.H.Martin jr.(1973) gegeben werden.
Ein dem Satz von Müller entsprechender Abschätzungssatz läßt sich auf Banach-Räume von beschränkten Funktionen übertragen.

P. WALTMAN: Competition equations

The paper concerns a system of ordinary differential equations modeling two (and sometimes more) predators competing exploitatively for the same prey or resourse. The predators feed on the prey with a saturating functional response to prey densitiy. Given the growth parameters of the prey and Michaelis-Menton (or Holling) kinetics for the predator we focus on which prey species will survive and which will not. Survival depends critically on the growth parameters of the prey and on another parameter which is the ratio of Michaelis-Menton constant to the natural rate of increase times the death rate.
Numerical results are given where the parameters fall outside the range of the theorems.

H. WIMMER: Die Gleichung $(g(x))_x\ A\ x - B\ g(x) = h(x)$

Es wird eine Gleichung diskutiert, die in der Theorie der Integralmannigfaltigkeiten auftritt. Vorgegeben sei das System
(1) $\dot{x} = A\ x + p_1(x,y)\ ,\ \dot{y} = B\ y + p_2(x,y)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Die Restglieder p_i sollen für $(x,y) = (0,0)$ von höherer als erster Ordnung verschwinden und beliebig hohe Ableitungen haben.
Es sei eine Integralmannigfaltigkeit der Form $\{(t,x,y),\ y=s(x)\}$ für (1) gegeben. $s(x)$ habe eine Taylor-Entwicklung

$$s(x) = \sum_{j=1}^{\infty} s^j(x) ,$$

wobei die Komponenten von $s^j(x)$ homogene Polynome vom Grad j in $x_1,\dots,x_n$ sind. Für die Koeffizienten $s^j(x)$ besteht dann eine rekursive Beziehung der Form

$$(s^j(x))_x\ A\ x - B\ s^j(x) = q^j(x) ,$$

wobei die Komponenten von q^j homogene Polynome vom Grad j sind und von $s^1,\dots,s^{j-1}$ abhängen. Schreibt man $\mathbb{C}^m_r[x]$ für den linearen Raum aller m-Vektoren mit homogenen Polynomen in $x_1,\dots,x_n$ vom Grad r und ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$, so führt die eben beschriebene Rekursionsbeziehung der Koeffizienten von $s(x)$ auf das folgende Problem:
Wann gibt es für jedes $h(x) \in \mathbb{C}^m_r[x]$ eine Lösung $g(x) \in \mathbb{C}^m_r[x]$ für die Gleichung

$$(2) \qquad (g(x))_x\ A\ x - B\ g(x) = h(x) \quad ?$$

Mit Hilfe von Stabilitätsüberlegungen wurde von Knobloch-Kappel (1974) gezeigt, daß sicher dann eine Lösung existiert, wenn alle Eigenwerte von A einen negativen und alle Eigenwerte von B einen positiven Realteil haben.
Wir beweisen folgende notwendige und hinreichende Bedingung:
A habe die Eigenwerte $\lambda_1,\dots,\lambda_n$,
B habe die Eigenwerte $\mu_1,\dots,\mu_m$.
(2) ist genau dann für alle $h \in \mathbb{C}^m_r[x]$ lösbar, wenn
$r_1\lambda_1 + \dots + r_n\lambda_n \neq \mu_j$, $j=1,\dots,m$, $r_1+\dots+r_n=r$ gilt.
Für den Beweis wird ein durch $q_x(x)\ A\ x$ definierter linearer Operator auf einem Raum von homogenen Polynomen untersucht. Es zeigt sich, daß dieser Operator als partielle Derivation in einem Raum von symmetrischen Tensoren aufgefaßt werden kann und daß damit seine Struktur klar ist.
Geht man von einem periodischen System der Form (1) aus, so führt die Frage nach Integralmannigfaltigkeiten auf eine Gleichung

$$w_t(t,x) + w_x(t,x)\ A(t)\ x - B(t)\ w(t,x) = f(t,x).$$

Mit Hilfe der charakteristischen Multiplikatoren von $\dot{x}=A(t)x$ und $\dot{y}=B(t)y$ wird auch für diese Gleichung ein Kriterium für die Lösbarkeit angegeben.

R. Reißig (Bochum)