MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 14/1977

Klassifikation von Flächen

3.4. bis 9.4.1977

Die Tagung stand unter der Leitung von H. Popp (Mannheim) und K. Ueno (Kyoto, z.Zt. Bonn).

Teilnehmer

H. Abels, Bielefeld
N. Allen, Bielefeld
G. Angermüller, Bonn
H.J. Bartel, Konstanz
R.Berndt, Hamburg
J. Bingener, Osnabrück
E. Binz, Mannheim
E. Böger, Bochum
R. Böhme, Erlangen
H.W. Borchers, Mannheim
Th. Bröcker, Regensburg
G. Fischer, München
H. Flenner, Osnabrück
E. Freitag, Mainz
G. Frey, Saarbrücken
K. Fritzsche, BOnn
T. Fujita, Mannheim
J. Gamst, Bremen
W.D. Geyer, Erlangen
E. Gottschling, Mainz
H.M. Greuel, Bonn
H. Helling, Bielefeld
E. Kani, Heidelberg
L. Kaup, Konstanz
R. Kiehl, Mannheim
R. Lamotke, Köln
H. Lange, Erlangen
M. Lindner, Saarbrücken
E. Looyenga, Nijmwegen
F. Lorenz, Münster
B.H. Matzat, Karlsruhe
E. Maus, Göttingen
L. Miller, Karlsruhe
G. Mülich, Hamburg
M. Namba, Göttingen
U. Orbanz, Paderborn
K. Pommering, Mainz
H. Popp, Mannheim
F. Sakai, Bonn
M. Schneider, Göttingen
K. Srinivasacharyulu, Montreal
J.H.M. Steenbrinck, Amsterdam
U. Storch, Osnabrück
S. Suckow, Mainz
G. Tamme, Regensburg
K. Ueno, Bonn
A. Van de Ven, Leyden
E. Viehweg, Mannheim

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Ziel der Tagung war eine systematische Darstellung der Klassifikationstheorie von Castelnuovo, Enriques und Kodaira für kompakte komplexe Flächen, sowie ein Bericht über die neueren Entwicklungen der Klassifikationstheorie quasi-projektiver Flächen und höher dimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Vortragsauszüge

K. Ueno: Invarianten und Tabelle

Die wesentlichen birationalen Invarianten einer komplexen Fläche S wurden eingeführt: $p_g(S)$ (geometrisches Geschlecht), $P_m(S)$ (m-Geschlecht), $q(S)$ (Irregularität), $\varkappa(S)$ (Kodaira Dimension), $a(S)$ algebraische Dimension, $b_i(S)$ (i-te Betti-Zahl), $\chi(S,O_S)$ (Euler-Charakteristik der Strukturgarbe O_S); und folgende Klassifikationstabelle von Castelnuovo, Enriques und Kodaira angegeben, deren Richtigkeit in den folgenden Vorträgen zu beweisen war.

S relativ minimal

$\varkappa$	P_{12}	P_2	p_g	K	c_1^2	q	b_1	χ	a	S Struktur
2	>10	>0			>0		$2 \mid b_1$	>0	2	alg. Fläche von allgem. Typ.
1	>1				0			≥ 0	2,1	elliptische Fläche von allg. Typ
0	1	1	1	0	0	2	4	0	2,1,0	komplexer Torus
			1	0	0	2	3	0	1	elliptische Fläche (Typ $\underline{VI}_0$)
			1	0	0	0	0	2	2,1,0	K 3 Fläche
			0	$\neq 0$	0	0	0	1	2	Enriques Fläche
		1 oder 0	0	$\neq 0$	0	1	2	0	2	hyperelliptische Fläche
					0	1	1	0	1	elliptische Fläche (Typ $\underline{VII}_0$)
$-\infty$	0	0	0		8 oder 9	0	0	1	2	$\mathbb{P}^2$
					0	1	2	0	2	elliptische Fläche $\sim \mathbb{P}^1 \times C$, $g(C)=1$
					$8(1-q) < 0$	≥ 2	$2q$	$1-q<0$	2	Regelfläche vom Geschlecht $q \geq 2$
					0	1	1	0	1	Hopf Fläche
						1	1	0	0	Fläche vom Typ $\underline{VII}_0$

Darüberhinaus wurden wichtige Beispiele von Flächen beschrieben und die albanese Abbildung für kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten eingeführt.

G. Frey: Satz von Riemann-Roch auf Flächen.

Der Vortrag hat die in den nachfolgenden Vorträgen benötigte Maschinerie bereitgestellt. Die Schnittheorie von Geradenbündeln auf Flächen wurde definiert sowie die folgenden Sätze und Formeln diskutiert und teilweise bewiesen: Riemann-Roch'scher Satz, Serre Dualität, Noether'sche Formeln, algebraischer Indexsatz, Adjunktionsformel, Indexsatz von Hirzebruch.

K. Fritzsche: Satz von Iitaka und Flächen allgemeinen Typs.

Zuerst wurde der folgende Satz von Iitaka bewiesen:
Sei V eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit $\varkappa(V) > 0$.
Es existieren eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit V^*, eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit W^* und eine surjektive holomorphe Abbildung $f : V^* \longrightarrow W^*$, so daß gilt:

1) $V^* \sim V$ ist bimeromorph
2) $\dim W^* = \varkappa(V)$
3) Es gibt eine dichte Teilmenge $U \subset W^*$, so daß für $w \in U$ die Faser $V^*_w = f^{-1}(w)$ irreduzibel und glatt ist und Kodaira Dimension 0 hat. Weiter ist f birational äquivalent zur m-kanonischen Abbildung $\phi_m : V \longrightarrow W_m = \phi_{mK}(V)$ für ein geeignetes positives m.

Dieser Satz verallgemeinert den durch Enriques und Kodaira bekannten Satz, daß eine Fläche mit Kodaira Dimension 1 eine elliptische Fläche ist, also ein Büschel elliptischer Kurven trägt.
Anschliessend wurde über Ergebnisse von Bombieri für Flächen S allgemeinen Typs berichtet: $\phi_{nK}: S \longrightarrow \phi_{nK}(S)$ ist holomorph und

birational für $n \geq 5$, $\phi_{nK}(S)$ hat höchstens endlich viele rationale Doppelpunkte als Singularitäten. Insbesondere gilt für Flächen allgemeinen Typs: $\chi(O_S) \geq 1$ und $P_m(S) = \frac{1}{2}(m-1)m \cdot K_S^2 + \chi(O_S)$ für $m \geq 2$.

E. Viehweg: Die Additivität der Kodaira Dimension und der kanonische Divisor elliptischer Flächen.

Die Ergebnisse dieses Vortrags sind für die Klassifikation von Flächen mit Kodaira Dimension ≤ 0 grundlegend und gestatten einen neuen Zugang zu der Klassifikation dieser Flächen.

Die folgenden Sätze wurden bewiesen:

Satz 1: Es sei V eine kompakte komplette glatte algebraische Fläche, W eine Kurve und $\pi : V \longrightarrow W$ ein Morphismus mit zusammenhängender allgemeiner Faser V_a. Dann ist

$$\varkappa(V) \geq \varkappa(W) + \varkappa(V_a).$$

Satz 2: Es sei (mit den Bezeichnungen von Satz 1) V_a eine Kurve vom Geschlecht 1. Für $w \in W$ sei $V_w = \pi^{-1}(w) = \sum_{i=1}^{r} n_i C_i$, C_i Primdivisor und $m_w = ggT(n_1, \ldots, n_r)$. Dann existiert ein Divisor d auf W vom Grad $\chi(V, O_V)$, so daß

$$K_V = \pi^* K_W + \pi^* d + \sum_{w \in W} \frac{m_w - 1}{m_w} V_w.$$

Als Folgerung aus Satz 2 erhält man: Es ist $12 \cdot K_V \geq 0$, wenn $\varkappa(V) \geq 0$ ist. Im zweiten Teil des Vortrags wurde über einige Ergebnisse der Kodaira'schen Klassifikationstheorie elliptischer Flächen berichtet.

W.D. Geyer: Klassifikation algebraischer Flächen mit Kodaira-Dimension 0.

Unter wesentlicher Benutzung der beiden im Viehweg'schen Vortrag bewiesenen Sätze wurde Enriques' Klassifikation der algebraischen Flächen mit Kodaira-Dimension 0 hergeleitet. Es gilt die Charakterisierung

Satz: Sei S eine (algebraische) Fläche ohne exzeptionelle

Kurven 1.Art.

Dann gilt: $\varkappa(S) = 1 \Leftrightarrow K^2 = 0$ und $12 \cdot K > 0$

$\varkappa(S) = 0 \Leftrightarrow 12 \cdot K = 0$.

Der Beweis der 2. Behauptung wurde nach Typen getrennt durchgeführt, und folgende Tabelle der algebraischen Flächen mit Kodaira-Dimension 0 (ohne exzeptionelle Kurven 1.Art) entwickelt.

Typ	$\chi(\mathcal{O})$	q	p_g	minimales d mit $dK \sim 0$
K3-Fläche	2	0	1	1
Enriques Fläche	1	0	0	2
hyperllipt. Fläche	0	1	0	2,3,4 oder 6
abelsche Fläche	0	2	1	1

Weiter wurden die unverzweigten Überlagerungen dieser Flächen studiert, die hyperelliptischen Flächen als Quotienten eines Produktes zweier elliptischer Kurven erkannt, die Enriques-Flächen als Quotienten von K3-Flächen nach einer Involution. Jede glatte Quartik im P_3 ist K3-Fläche, und die topologische Struktur von K3-Flächen wurde diskutiert.

K. Pommering: <u>Charakterisierung von rationalen Flächen</u>.

<u>Satz von Castelnuovo/Andreotti</u>: Sei S eine relativ minimale (projektiv algebraische) Fläche mit 2-Geschlecht $p_2 = 0$ und Irregularität $q = 0$. Dann ist S die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ oder Regelfläche über der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1$.

Dieser Satz wurde nach Kodaira bewiesen.

S. Suckow: <u>Charakterisierung von Regelflächen durch $\varkappa = -\infty$.</u>

Satz: Eine relativ-minimale algebraische Fläche mit $\varkappa = -\infty$ ist eine Regelfläche (oder P_2).

Der Beweis benutzt den Satz von Castelnuovo im Fall $q = 0$, die Albanese-Faserung und die Subadditivität der Kodaira-Dimension

(s. Vortrag von Viehweg) im Fall $q > 0$.

Weiter wurde eine Beschreibung der Regelflächen über P_1 und elliptischen Kurven angegeben.

R. Kiehl: Klassifikation analytischer Flächen nach der algebraischen Dimension.

Sei X ein glatter kompakter zusammenhängender komplexer Raum. Dann ist der Körper $\mathfrak{M}(X)$ der meromorphen Funktion auf X endlich erzeugt über $\mathbb{C}$ und es gilt Transzendenzgrad $\mathfrak{M}(X)/\mathbb{C} \leq \dim X$. $a(X)$ = Transzendenzgrad $\mathfrak{M}(X)/\mathbb{C}$ heißt die algebraische Dimension von X.

Der Begriff der algebraischen Reduktion für komplexe Mannigfaltigkeiten wurde eingeführt und für Flächen die folgenden Sätze bewiesen:

Satz 1: Eine glatte kompakte komplexe Fläche S mit algebraischer Dimension 2 ist projektiv algebraisch.

Satz 2: Eine glatte kompakte komplexe Fläche S mit $a(S) = 1$ ist eine elliptische Fläche.

Weiter wurden Bedingungen für Flächen S angegeben, die $a(S) > 0$ implizieren.

M. Knebusch: Flächen der algebraischen Dimension 0.

Es wurde der folgende Satz von Kodaira bewiesen:

Eine relativ minimale analytische Fläche, die keine nicht konstanten meromorphen Funktionen besitzt, ist entweder eine K3-Fläche oder ein Torus oder eine Fläche "vom Typ VII", d.h. mit $b_1 = 1$, $p_g = 0$.

G. Tamme: Deformation von K3-Flächen.

Es wurde über folgenden Satz von Kodaira berichtet:

Alle K3-Flächen liegen in einer Deformationsklasse. Zunächst wurde bewiesen: Jede K3-Fläche ist deformierbar in eine elliptische K3-Fläche/$\mathbb{P}^1$, deren singuläre Fasern rationale Kurven mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt oder rationale Kurven mit einer Spitze sind. Alsdann wurde berichtet, wie man aus diesem Resultat an Hand der Kodaira'schen Theorie der elliptischen Flächen den genannten Deformationssatz erhält.

H. Popp: Hopfflächen.

Eine kompakte komplexe Fläche S heißt eine Hopffläche, wenn die universelle Überlagerung $\tilde{S}$ von S isomorph zu $\mathbb{C}^2 - 0$ ist, und eine primäre Hopffläche, wenn darüberhinaus $\pi_1(S) \simeq \mathbb{Z}$ ist. Hopfflächen sind Beispiele für Flächen vom Typ VII_o. Der Struktursatz für primäre Hopfflächen wurde bewiesen und gefolgert, daß jede primäre Hopffläche diffeomorph zu $S_1 \times S_3$ und daher vom Typ VII_o ist. Da jede Hopffläche eine endliche unverzweigte galoissche Überlagerung besitzt die primäre Hopffläche ist, folgt, daß jede Hopffläche vom Typ VII_o ist. Die elliptischen Hopfflächen wurden charakterisiert und gezeigt, daß die meisten Hopfflächen von algebraischer Dimension O sind.

F. Sakai: Flächen vom Typ VII_o.

In diesem Vortrag wurden die neueren Untersuchungen über Flächen der Klasse VII_o beschrieben. Es wurde gezeigt, daß auf einer Fläche S vom Typ VII_o mit algebraischer Dimension O keine irreduziblen Kurven vom Geschlecht 2 existieren und daß die Anzahl der Kurven auf S $\leq 2+b_2$ ist. Die von Inoue gefundenen Flächen vom Typ VII_o wurden angegeben und die Prinzipien von Kato und Nakamura für die Konstruktion von Flächen vom Typ VII_o wurden beschrieben.

T. Fujita: Klassifikation quasi-projektiver Flächen.

Die logarithmische Kodaira Dimension $\bar{\kappa}$ und die logarithmische Irregularität $\bar{q}(S)$ wurden definiert und die folgenden Klassifikationstabelle gezeigt:

S quasiprojektive Fläche

$\bar{\varkappa}(S)$	$\bar{q}(S)$	Struktur
$-\infty$	0	?
	>0	logarithmische Regelfläche.
0	0	vom logarithmischen K-3 Typ
	1	logarithm. ellipt. Fläche (v. speziellen Typ)
	2	~ quasi abelsche Fläche
1		logarithmische elliptische Fläche
2		vom logarith. hyperbolischen Typ.

K. Ueno: <u>Klassifikation höher dimensionaler algebraischer Mannigfaltigkeiten</u>.

Als Beispiel für die Klassifikation algebraischer Mannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 3 wurde der folgende Satz bewiesen:

<u>Satz</u>: Sei V eine kompakte algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension $\leqq 3$. Ist $\varkappa(V) = 0$, so gilt

1) Die Albanese Abbildung $\alpha : V \rightarrow A(V)$ ist surjektiv.

2) α ist genau dann birational, wenn $q(V) = \dim V$.

H.Popp (Mannheim)