MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 17/1977

Mathematische Logik

24.4. bis 30.4.1977

Unter der Leitung von E.Specker (Zürich) und W.Felscher (Tübingen) fand in der Woche vom 24.4. bis 30.4.1977 im Forschungsinstitut in Oberwolfach die diesjährige Tagung über Mathematische Logik statt. Es wurden 27 Vorträge über verschiedene Gebiete der Mathematischen Logik gehalten.

Teilnehmer

H.P.Barendregt, Utrecht
E.Börger, Münster
W.Buchholz, München
H.G.Carstens, Hannover
J.Derrick, Leeds
K.-H.Diener, Köln
E.Engeler, Zürich
B.Falkenberg, Freiburg
U.Felgner, Tübingen
J.Flum, Freiburg
P.Hájek, Praha
G.Hasenjaeger, Bonn
F.Hebeisen, Freiburg
Hoering, München
G.Jäger, München
J.W.Klop. Utrecht
S.Koppelberg, Berlin
H.Läuchli, Zürich
H.Luckhardt, Frankfurt
W.Maaß, München
J.A.Makowski, Berlin
G.H.Müller, Heidelberg
H.Pfeiffer, Hannover
K.-P.Podewski, Hannover
W.Pohlers, München
K.Potthoff, Kiel
A.Prestel, Konstanz
C.Rauszer, Warszawa
M.M.Richter, Aachen
P.Schmitt, Heidelberg
K.Schütte, München
J.Schulte Mönting, Tübingen
H.Schwichtenberg, Heidelberg
M.Srebrny, Warszawa
G.Takeuti, Urbana
E.J.Thiele, Berlin
W.Thomas, Freiburg
H.Vogel, Münster
H.Volger, Tübingen
S.S.Wainer, Leeds
M.Ziegler, Freiburg

Vortragsauszüge

H.P.BARENDREGT: Groups in combinatory logic

Let $\mathcal{M} = \langle X, \bullet \rangle$ be a λ-algebra satisfying (η): $\lambda x.zx = z$. Let for all $a,b \in X$ $a \circ b = \lambda z.a(bz)$. The *semigroup of* $\mathcal{M}$, notation $S(\mathcal{M})$, is $\langle X, \circ \rangle$. The *group of* $\mathcal{M}$, notation $G(\mathcal{M})$, is the subgroup of $S(\mathcal{M})$ consisting of all invertible elements ($I = \lambda x.x$ is by (η) the unit element of $S(\mathcal{M})$). $\mathcal{M}^0$ is the interior of $\mathcal{M}$, i.e. $\{[\![M]\!]^{\mathcal{M}} \mid M \text{ closed term}\}$. If T is a λ-theory (i.e. consistent set of equations between λ-terms), then $\mathcal{M}(T)$ is the canonical term model of T and $G(T)$ is $G(\mathcal{M}(T))$. $\underline{\lambda}$ is the minimal λ-theory. $\mathcal{H} = \{M = N \mid M,N \text{ unsolvable}\}$ is a λ-theory. If T is a λ-theory, then $T\eta$ is T extended with (η) and $T\omega$ is T extended with the ω-rule: $FZ = F'Z$ for all closed terms $Z \Longrightarrow F = F'$. Let S_ω be the group of permutations on ω with finite support. Let $G_0 = \{e\}$, $G_{n+1} = S_\omega \wr G_n$ (wreath product). There are canonical maps $G_n \rightleftarrows G_{n+1}$. Let $\vec{G} = \varinjlim G_n$, $\overleftarrow{G} = \varprojlim G_n$ and $\overleftarrow{G}^r = \varprojlim^r G_n = \{\langle g_i \rangle \mid g_i \in G_i \text{ and } \lambda i.g_i \text{ is recursive (after coding)}\}$.

Results. (i) Let $T = \underline{\lambda}\eta$, $\underline{\lambda}\omega$, $\mathcal{H}\eta$ or $\mathcal{H}\omega$. Then $G(T) \cong \vec{G}$.
(ii) $G(D_\infty^0) = \overleftarrow{G}^r$. (iii) $G(D_\infty) \supseteq \overleftarrow{G}$.

E.BÖRGER: Über die r.a. Gradkomplexität von Klassen Postscher Korrespondenzprobleme

$\mathcal{G}$ sei eine rekursive Klasse von (Gödelnummern von) Grammatiken und $\vartheta \subseteq \mathcal{G}$. Wenn es ein effektives Verfahren mit rekursivem Wertebereich für jede Einschränkung auf einen rekursiven Definitionsbereich gibt, das jedem Postschen Korrespondenzproblem (x,y) eine Grammatik $G_{(x,y)} \in \mathcal{G}$ zuordnet, sodaß für alle (x,y) gilt: (x,y) ist lösbar genau dann wenn $G_{(x,y)} \in \vartheta$, dann kann man jedem nicht-rekursiven rekursiv aufzählbaren many-one Grad d eine rekursive Klasse $R_d \subseteq \mathcal{G}$ effektiv so zuordnen, daß $\vartheta \cap R_d$ den many-one Grad d besitzt.
Der Beweis benutzt die (im Wesentlichen schon von E.Post bewiesene) Tatsache, daß es in jedem r.a. many-one Grad ein Postsches Korrespondenzproblem $\{(x,y) \mid (x,y) \in C, (x,y) \text{ lösbar}\}$ einer rekursiven Menge C von Postschen Korrespondenzpaaren gibt. Die meisten in der Literatur bekannten Grad-Darstellungssätze für Entscheidungsprobleme ϑ von Klassen $\mathcal{G}$ formaler Sprachen sind Spezialfälle des oben angegebenen

Satzes. Moral: Bedingen sich für die bekannten Entscheidungsprobleme formaler Sprachen Unentscheidbarkeits- und Grad-Darstellungssätze?

W. BUCHHOLZ: Zur Beweistheorie iterierter induktiver Definitionen

Es wird eine neue Methode zur beweistheoretischen Untersuchung iterierter induktiver Definitionen beschrieben. Kernpunkt dieser Methode ist die Verwendung (konstruktiv) überabzählbarer Herleitungsbäume, die durch eine neue Art unendlicher Schlußregeln ($\Omega_{\mu+1}$) erzeugt werden. So, wie die gewöhnliche ω-Regel das Schema der vollständigen Induktion ersetzt, gestattet die Ω_1-Regel das Axiomenschema $\forall x(\mathfrak{A}[\mathcal{F},x]\to\mathcal{F}[x])\to\forall x(Q^{\mathfrak{A}}(x)\to\mathcal{F}[x])$ der Induktion über die induktiv definierte Menge $Q^{\mathfrak{A}}$ herzuleiten.

Sei HA* der übliche infinitäre Sequenzenkalkül für die Heyting Arithmetik zusammen mit der Regel (Q) $\dfrac{\Gamma\Longrightarrow\mathfrak{A}[Q,n]}{\Gamma\Longrightarrow Q(n)}$. Sei ferner $P_{Q(n)}$ die Menge der schnittfreien Herleitungen von Q(n) in HA*. Die Ω_1-Regel läßt sich dann folgendermaßen formulieren: Ist $\Gamma\Longrightarrow A$ eine Sequenz und Φ eine Funktion, die jedem $\pi\in P_{Q(n)}$ eine Herleitung $\Phi(\pi)$ von $\Gamma\Longrightarrow A$ zuordnet, so ist der (i.a. überabzählbare) Baum

$$\dfrac{\begin{array}{c}|\\ \Phi(\pi)\\ |\\ \ldots\ \Gamma\Longrightarrow A\quad\ldots\quad(\pi\in P_{Q(n)})\end{array}}{\Gamma\Longrightarrow(Q(n)\to A)}$$

eine Herleitung von $\Gamma\Longrightarrow(Q(n)\to A)$.

Man erhält einfache und durchsichtige Beweise für folgende Beziehungen:

(I) $|ID_\nu^c| = |ID_\nu^{pos}| = \theta\varepsilon_{\Omega_\nu+1}0$

(II) ID_ν^c ist konservativ über ID_ν^{pos} bzgl. negativer arithmetischer Formeln.

(III) ID_ν^{mon} ist konservativ über ID_ν^{pos} bzgl. Formeln der Stufe 0 ($\hat{=}\ \Pi_1^1$-Formeln).

(IV) ID_ν^c und ID_ν^{pos} haben dieselben beweisbar rekursiven Funktionen und dieselben beweisbaren prim.rek. Wohlordnungen.

(V) $|W\text{-}ID_\omega^c| = \theta(\Omega_\omega\cdot\varepsilon_0)0$, (wobei $W\text{-}ID_\omega^c \equiv \Pi_1^1\text{-}CA$).

Bemerkung: Resultate (I),(II) hat als erster Pohlers bewiesen, und zwar mittels einer Verfeinerung des Takeuti'schen Reduktionsverfahrens für die Π_1^1-Analysis.

H.G.CARSTENS: Algorithmische Färbungen abzählbarer Graphen endlichen Geschlechts

Eine binäre rekursive Relation über den natürlichen Zahlen heißt ein stark rekursiver Graph falls sie irreflexiv, symmetrisch, lokal finit, zusammenhängend ist und eine rekursive Funktion zu jedem n eine Schranke angibt für die m die mit n in Relation stehen.
$\chi(G)$ sei die chromatische Zahl eines Graphen G und $\chi(p)$ sei das Maximum der chromatischen Zahlen der Graphen die in die endliche orientierbare Fläche S_p von Geschlecht p eingebettet sind.
Im Folgenden sei G stets ein stark rekursiver Graph mit $\chi(G) < \omega$.
$\chi_r(G) = \min\{k$: es gibt eine rekursive k-Färbung von G$\}$,
$\chi_r(p) = \max\{\chi_r(G)$: G eingebettet in $S_p\}$. Nun gilt:

(1) $\chi(G) \leq \chi_r(G) \leq 2\chi(G)$.

(2) $\forall k>2\colon \exists G\colon k = \chi(G)\ \&\ \forall\alpha\colon G \to \chi(G)$ Färbung: $\exists i<\chi(G)\colon \alpha^{-1}(i) \nleq_{btt} 0'$,
insbesondere: $\chi(G) < \chi_r(G)$.

(3) $\forall G\colon \exists\alpha\colon G \to \chi(G)$ Färbung: $\forall i<\chi(G)\colon \alpha^{-1}(i) \leq_{tt} 0'$.

(4) $4 \leq \chi_r(0) \leq 5$; (5) $\forall p>0\colon \chi_r(p) = \chi(p)$.

J.DERRICK: Definitions of Hierarchies in Set Theory

Given a theory $\mathcal{T}$ in a language $\mathcal{L}$ a hierarchy of sets whose urelements are the objects to which $\mathcal{T}$ refers is a "universe" which is built up from "levels" which themselves accumulate the members and subclasses of "previous" levels. We show how to define along the lines of Scott these notions in a conservative $\in$-extension of $\mathcal{L}$ in such a way that we may prove appropriate versions of well-foundedness and transitivity for the levels. For certain methods used to build the hierarchy, the levels will also be well-ordered.
These methods can be characterised by classes $\mathcal{Q}$ of formulas in $\mathcal{L}^{\in}$, the conservative $\in$-extension of $\mathcal{L}$, so that if $\mathcal{Q}$ is Δ_0-closed (i.e. closed under propositional connectives and bounded quantification) the hierarchy satisfies the well-foundedness schema for $\mathcal{Q}$-formulas. For certain $\mathcal{Q}$ we may prove the full well-foundedness schema.
This leads to alternative axiomatisations of the known set theories and to a discussion of their ontological assumptions. A study of the extra power that these theories give to $\mathcal{T}$ is made and various conservative extension results are proved. It also leads to an alternative

formulation of the concept of (near) admissible sets which turn out to be Δ_0-well-founded but not $\mathcal{Q}$-well-founded for any Δ_0-closed $\mathcal{Q} \supsetneq \Delta_0$.

K.-H.DIENER: Zur Konstruktion infinitärer Sprachen $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ ohne Auswahlaxiom

Verschiedene Konstruktionen bzw. Kodierungen infinitärer Sprachen $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ sind bekannt. Die intuitiv natürlichste dürfte die "lineare" Kodierung sein, bei der die Ausdrücke als Symbolfolgen und die syntaktischen Operationen als Funktionen dargestellt werden, die diese Ausdrücke aneinanderreihen (verketten). Die bisher in der Literatur angegebenen Konstruktionen (siehe etwa KARP, FELSCHER, PIERCE) können nicht in einer bekannten Mengenlehre ohne Auswahlaxiom durchgeführt werden. Sie verwenden stets die Annahme, daß reguläre Kardinalzahlen $\geq\alpha$ existieren. Ob das aber zum Beispiel in ZF zutrifft, ist schon für $\alpha = \omega_1$ ein wohlbekanntes ungelöstes Problem!

Wir werden beweisen, daß sich auch ohne die obige Annahme stets sämtliche infinitäre Sprachen $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ - als Mengen! - konstruieren lassen. Als Hauptergebnis geben wir genaue Abschätzungen für die Längen und Ränge der Ausdrücke an. Als Spezialfall ergibt sich, daß eine Formel φ der Sprache $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ mit abzählbaren Konjunktionen und Disjunktionen zwar überabzählbare Länge und die Menge sub_φ ihrer Teilformeln zwar überabzählbare Mächtigkeit haben kann, daß aber die Länge von φ stets kleiner als ω_2 und die Mächtigkeit von sub_φ stets kleiner als $\aleph_2$ ist. Diese Aussagen sind Theoreme der Mengenlehre ohne Auswahlaxiom; sie gelten sogar in CHURCHschen und SPECKERschen Modellen ohne überabzählbare reguläre Kardinalzahlen.

B.FALKENBERG: Die Unentscheidbarkeitsgrade der Halteprobleme von Fang-Systemen (tag-systems)

Von Aanderaa und Belsnes wurde 1971 gezeigt (JSL Vol 36), daß in jedem m-Grad ein Halteproblem eines Fang-Systems liegt. Nähere Aussagen über die Abschlagzahl (deletion number) konnten dabei nicht gemacht werden. Wir beweisen den Satz: Zu jeder rekursiv aufzählbaren nicht leeren Menge a und zu jeder natürlichen Zahl $p > 1$ gibt es ein Fang-System mit Abschlagzahl p, dessen Halteproblem zu a m-äquivalent ist. Der Satz gilt nicht für Fang-Systeme mit Abschlagzahl 1, da deren Halteprobleme entscheidbar sind. Auch auf die Voraussetzung, daß a

rek. aufzählbar und nicht leer ist kann man nicht verzichten. Der Satz wird falsch, wenn man "m-äquivalent" durch das stärkere "1-äquivalent" ersetzt: Halteprobleme von Fang-Systemen sind nicht-einfache Mengen.

U.FELGNER: Zur Struktur $\aleph_0$-kategorischer stabiler Gruppen

Es wurde der Beweis des folgenden Satzes skizziert: Jede $\aleph_0$-kategorische stabile Gruppe G besitzt einen nilpotenten Normalteiler von endlichem Index.

An Methoden aus der Modelltheorie benutzt der Beweis wesentlich Definierbarkeitseigenschaften die sich aus dem Satz von Ryll-Nardzewski bzw. Shelah (im Falle von Stabilität) ergeben - z.B. ergibt sich daraus daß das lokal-auflösbare Radikal S(G) 1.-Stufe definierbar ist und sogar auflösbar. Die Durchführung des Beweises verwendet dann starke algebraische Hilfsmittel - hauptsächlich Sylow-Theorie. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Anzahl der charakteristischen Untergruppen und eingeschaltet eine Induktion über die Dimension des Verbandes aller Zentralisatoren von G.

J.FLUM: Über definierbare Relationen

Es wird eine Verallgemeinerung eines Satzes von Feferman über projektive Relationen hergeleitet. Mit dieser Verallgemeinerung läßt sich etwa zeigen, daß die direkte Potenzoperation bei Moduln die elementare Äquivalenz erhält.

G.HASENJAEGER: Über die Unmöglichkeit eines bestimmten Unmöglichkeitsbeweises.

Für die Polynome in $\mathbb{Z}(x,z)$: $\gamma_m(x,z) := \sum_{k<m} x^k$, $Y_0(x,z) := \gamma_5(x) + x \cdot z$, $Y_1(x,z) := x^4 \cdot Y_0(x^{-1}, z)$, $Y_2(x,z) := z \cdot Y_0(x, z^{-1})$, $Y_3(x,z) := x^4 \cdot z \cdot Y_0(x^{-1}, z^{-1})$, $Y_{4+k}(x,z) := Y_k(z,x)$, und das Ideal $J = (Y_0, \ldots, Y_7)$ ist $\gamma_6(x) \cdot \gamma_{16}(z) \in J$..

Dies beschreibt keine Parkettierung des Rechtecks $\overline{6} \times \overline{16}$ durch "Hexa-Y's", da bei $\gamma_6(x) \cdot \gamma_{16}(z) = \sum_{k<8} A_k(x,z) \cdot Y_k$ die A_k nicht nur Koeffizienten $\in \{0,1\}$ haben. Die Möglichkeit der Parkettierung eines Rechtecks bleibt unentschieden.

Das Analogon zur Koeffizientenbedingung ist automatisch erfüllt bei der Formulierung solcher Unmöglichkeitssätze in einer rudimentären

Zahlentheorie mit Prädikatenvariablen. Die Beweisbarkeit solcher Sätze durch "geeignete" Einsetzungen in Ind(A^1) und Formen des Schubfachprinzips wird am Beispiel eines einfachen Parkettierungsproblems diskutiert.

F.HEBEISEN: Charakterisierung der Aufzählungsreduzierbarkeit

Unter den verschiedenen nicht äquivalenten Begriffen für relative Berechenbarkeit von partiellen Funktionen über natürlichen Zahlen charakterisieren wir die Aufzählungsreduzierbarkeit (siehe Rogers: Theory of recursive functions and effective computability, 1967) durch eine Reihe von "impliziten" Eigenschaften.

Definition: Sei $\leqq$ eine 2-stellige Relation auf den partiellen Funktionen über natürlichen Zahlen. Eine Menge R von natürlichen Zahlen ist aufzählbar in einer partiellen Funktion g im Sinn von $\leqq$, falls es ein $f \leqq g$ gibt mit $R = \text{Bild } f$.

Theorem: Sei $\leqq$ eine 2-stellige Relation auf den partiellen Funktionen über natürlichen Zahlen mit

(i) $\leqq$ ist transitiv

(ii) Wenn f partiell rekursiv in g, dann $f \leqq g$

(iii) Für totales g ist $f \leqq g$ äquivalent dazu, daß f aufzählungsreduzierbar auf g

(iv) $f \leqq g$ genau dann, wenn Graph f in g im Sinn von $\leqq$ aufzählbar

(v) Es gibt ein in g im Sinn von $\leqq$ aufzählbares R^0_g, so daß es für alle in g im Sinn von $\leqq$ aufzählbaren Mengen R ein r gibt, so daß $x \in R$ äquivalent ist zu $\langle r,x\rangle \in R^0_g$

Dann und nur dann ist $\leqq$ dieselbe Relation wie die Aufzählungsreduzierbarkeit.

H.LUCKHARDT: Ein prinzipieller Effekt bei Berechnungen mit reellen Zahlen

Jede algorithmische Verifizierung V für das *extensionale* $u \neq 0 \vee u \neq 1$ ist wesentlich *intensional*, d.h. die Entscheidung hängt wesentlich von den Zahlgeneratoren ab. Alle diese V sind in den intensionalen Zahlgeneratoren stetig, in den reellen Zahlen jedoch mehrdeutig. Sie lassen sich deshalb nicht durch extensionale Bedingungen eindeutig beschreiben.- Solche oder ähnliche Entscheidungen und ihr intensionaler Effekt kommen in vielen Konstruktionen mit reellen Zahlen vor.-

Weitere Konsequenzen: (i) Die Skolem-Funktor-Einführung ist allgemein für klassische und intuitionistische Theorien der Stufe ≥2 *falsch*. (ii) Auswahl und Extensionalität für Funktionale vom *Typ 2* sind intuitionistisch unverträglich.

J.A.MAKOWSKY: Approximating second order logic: positive quantification for countable sets

The logic L^P is introduced which lies between L(Q) and L(aa). An axiomatization is given and proof-theory is discussed. Compactness (for countable sets of formulas) and Löwenheim-Skolem-Tarski-theorems hold. Also omitting types theorems can be proved. A back and forth argument can be developed. All this can be put together to discuss categoricity problems. (Partly this is joint work with S.Shelah and J.Stavi)

W.MAASZ: α- und β-Rekursionstheorie

Als guten Test für eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Rekursionstheorie (GRT) sehen wir die Durchführung von Prioritätsargumenten in dieser Verallgemeinerung an. Es wurde eine Überblick über den gegenwärtigen Stand der Grad-Theorie in α(admissible)- und β(inadmissible)-Rekursionstheorie gegeben. Die Übertragung der Prioritätsargumente erweist sich als weder trivial noch uniform durchführbar, sondern erfordert tiefliegende Sätze über die konstruktive Hierarchie.Dabei treten neue Effekte auf, die in der GRT nicht beobachtet werden können. Ein Beispiel ist der folgende Satz:

Theorem: Es existiert eine α-rekursive aufzählbare Menge A, sodaß $A <_\alpha 0'$ und $A' =_\alpha 0''$ genau dann wenn $\sigma 2 \mathrm{cf}\, \alpha \geq \sigma 2 p \alpha$.

H.PFEIFFER: Algebraische Modelle für zeitabhängige Aussagenlogik

D.M.GABBAY erklärt in seiner Arbeit "Model theory for tense logics", Ann. of Math. Logic 8,(1975) Strukturen für zeitabhängige Logiken und mit ihrer Hilfe Modelle für verschiedene Axiomensysteme zeitabhängiger Logik, die den KRIPKE-Modellen für die intuitionistische Logik ähnlich sind. Das allgemeinste System ist WK_t. Wir definieren dafür algebraische Modelle und zeigen, daß sie dasselbe leisten wie die Gabbay-Modelle. Wir beschränken uns dabei auf die Aussagenlogik.

K.-P.PODEWSKI: Topolgien auf Gruppen

Def.: Eine Gruppe $(G,\cdot,^{-1},e)$ heißt topologisierbar, wenn es eine T_0-Topologie τ auf G gibt mit $\tau \neq \mathcal{P}(G)$ so daß $\cdot,^{-1}$ stetig sind.

Satz (S.Shelah): Gilt GCH, dann gibt es eine nicht topologisierbare Gruppe G mit $|G| = \aleph_1$.

Def.: Sei G eine Gruppe und sei $G[x] = \{\prod_{i\leq n} a_i x^{\varepsilon_i} \mid n\in \mathbb{N}, a_i\in G, \varepsilon_i\in\{-1,1\}\}$.

G heißt gebunden, wenn es ein $S \subset\subset G[x]$ gibt mit $p(e) \neq e$ für alle $p \in S$ und für jedes $a \neq e$ gibt es ein $p \in S$ mit $p(a) = e$.

Satz: Ist G eine abzählbare Gruppe, dann sind folgende Eigenschaften äquivalent: 1. G ist nicht gebunden. 2. G ist topologisierbar. 3. G besitzt $2^{2^{\aleph_0}}$ viele T_0-Topologien, so daß $\cdot, ^{-1}$ stetig sind.

Satz (G.Hesse): Jede lokal auflösbare und jede FC-Gruppe ist nicht gebunden.

W.POHLERS: Teilsysteme der Analysis als konservative Erweiterungen einer verstärkten Zahlentheorie

Wir fixieren die folgenden Notationen: HA = Heyting Arithmetik, $T_1 \equiv T_2 :\leftrightarrow T_1$ und T_2 beweisen die gleichen arithmetischen Sätze, $T_1 \equiv_- T_2 :\leftrightarrow T_1$ und T_2 beweisen die gleichen negativen arithm. Sätze, CA = Komprehensionsaxiom, CR = Komprehensionsregel, AC = Kollektionsaxiom; $TI(<\alpha)$ = Schema der transfiniten Induktion über jeden echten Abschnitt einer Wohlordnung vom Ordnungstyp α. BI = Schema der klassischen Barinduktion. Es wurden die folgenden Ergebnisse referiert:

$(\Pi^1_1\text{-CA}) \equiv_- HA + TI(<\theta(\Omega_\omega\cdot\varepsilon_0)0)$ [gemeinsam mit W.Buchholz]

$(\Pi^1_1\text{-CA}) + BI \equiv_- HA + TI(<\theta\varepsilon_{\Omega_\omega+1}0)$

$(\Delta^1_2\text{-CR}) \equiv_- HA + TI(<\theta\Omega_{\omega^\omega}0)$

$(\Delta^1_2\text{-CA}) \equiv (\Sigma^1_2\text{-AC}) \equiv_- HA + TI(<\theta\Omega_{\varepsilon_0}0)$

Diese Ergebnisse wurden auf dem Umweg über System ID_ν ν-fach iterierter induktiver Definitionen gewonnen, für die $ID_\nu \equiv_- HA + TI(<\theta\varepsilon_{\Omega_\nu+1}0)$ gezeigt werden kann. Da $TI(<\theta\varepsilon_{\Omega_\nu+1}0)$ in der intuitionistischen Theorie ID^i_ν (mit positiven induktiven Definitionen) beweisbar ist, folgt daraus auch $ID^c_\nu \equiv_- ID^i_\nu$, womit Problem 36 in H.FRIEDMAN's Liste gelöst ist.

W.PRESTEL: Effektivitätsprobleme bei quadratischen Formen über Funktionenkörpern

Es sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Körpern. Wir nennen $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ eine

Schrankenfunktion für $\mathfrak{K}$, falls für alle $K \in \mathfrak{K}$ und $p_1, \ldots, p_n \in K[X] \setminus \{0\}$ mit Grad $p_i \leq m$ gilt: ist die quadratische Form $\sum_{i=1}^{n} p_i X_i^2$ isotrop in $K(X)$, so gibt es $(q_1, \ldots, q_n) \in K[X]^n \setminus \{0\}$ mit $\Sigma p_i q_i^2 = 0$ und Grad $q_i \leq f(n,m)$. Für die folgenden Klassen $\mathfrak{K}$ existieren rekursive Schrankenfunktionen: algebraisch abgeschlossene Körper, reell abgeschlossene Körper, endliche Körper.

Es wurde die Existenz einer rekursiven Schrankenfunktion für den Körper $\mathbb{Q}(X)$ für alle 5-teilbaren quadratischen Formen bewiesen. Zum Beweis wurde eine elementare Klasse $\mathfrak{K}$ betrachtet, zu der auch $\mathbb{Q}$ gehört. Die Existenz wurde mit modelltheoretischen Hilfsmitteln bewiesen.

C.RAUSZER: Algebraic and relational models for intermediate logics

Let LK (LI) denote the set of all formulas which are provable in classical (intuitionistic) predicate logic. A set L of formulas is called an intermediate predicate logic if $LI \subseteq L \subseteq LK$ and L is closed with respect to the same rules of inference as LI.

Let M be a Kripke structure. We say that M is a characteristic Kripke model for L if $L = L(M)$, where $L(M)$ is the set of formulas valid in M.

Lemma 1. The intermediate logic LI + all formulas of the form $(\neg\neg\exists x\varphi(x) \to \exists x\neg\neg\varphi(x))$ has no characteristic Kripke models.

Let $\{A_i : i \in I\}$ be a family of algebraic structures. We say that L has a characteristic set of algebraic models $\{A_i : i \in I\}$ if $L = \bigcap_{i \in I} L(A_i)$.

Lemma 2. There exists an intermediate predicate logic which has no characteristic set of models.

Let D be the schema $(\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \to (\forall x\varphi(x) \vee \psi))$ where x does not appear in ψ.

Theorem. If $D \in L$, then L has a characteristic Kripke model iff L has a characteristic set of algebraic models.

M.M.RICHTER: Einige Bemerkungen zur Gleichheitslogik

Es wurden einige Beobachtungen in der Prädikatenlogik der ersten Stufe mit Gleichheit mitgeteilt, die zusammen mit H.Bücken gemacht wurden. Ausgangspunkt war der Gentzenkalkül $LK^=$, in dem als Gleichheitsaxiom $\to t \equiv t$ und als Gleichheitsregel $\dfrac{\Gamma \to \Delta}{r \equiv s,\ \Gamma_s^r \to \Delta_s^r}$ auftraten.

Dieser Kalkül erlaubt einen einfachen Tableaubeweis für die Vollständigkeit und einen konstruktiven Schnitteliminationsbeweis. Letzterer ist der Anlaß, Gleichungen durch Reduktionen, die Übergänge nur noch in einer Richtung erlauben (evtl. noch modulo Substitutionen), zu ersetzen. Für solche Reduktionssysteme wurden Entscheidbarkeitsfragen diskutiert. Spezielle Systeme wurden auf Wortprobleme in der Gruppentheorie (u.a. "Sixth-groups") angewandt und ein Zusammenhang mit dem Algorithmus von Dehn hergestellt.

P.H.SCHMITT: Die L^t-Theorie der topologischen Gruppe der rationalen Zahlen

Die L^t-Theorie der topologischen Gruppe der rationalen Zahlen kann wie folgt axiomatisiert werden:

(1) Axiome für torsionsfreie, teilbare abelsche Gruppen

(2) $\forall X(o \in X \to \exists Y(o \in Y \wedge \forall x,y(x \in Y \wedge y \in Y \to x-y \in X)$

(3) Hausdorffsche Trennungseigenschaft

(4) $\exists X(o \in X \wedge \forall x(x \in X \to x = o))$

(5) $\forall X(o \in X \to \exists Y(o \in Y \wedge \forall x(n \cdot x \in Y \to x \in X)$ für jedes $n \in \omega$.

Der Beweis dieser Behauptung liefert außerdem, daß die topologische Gruppe der rationalen Zahlen L^t-elementare Substruktur der topologischen Gruppe der reellen Zahlen ist.

J.SCHULTE MÖNTING: Meta-Boole'sche Verbände

In einem orthomodularen Verband L definiert man für jede endliche Teilmenge A den Kommutator $[A] := \bigwedge_{\varphi \in 2^A} \bigvee_{a \in A} a^{\varphi(a)}$ mit $a^0 := a$, $a^1 := a'$.

Die Ableitung L' von L ist der von allen $[\{a,b\}]$, $a,b \in L$ erzeugte Subverband. Ist L eine Boolesche Algebra, so gilt $L' = \{0\}$. L heißt *quasiperfekt*, wenn $1 \in L'$ gilt.

Satz 1: Jeder endlich erzeugte orthomodulare Verband ist direktes Produkt eines quasiperfekten OMV und einer Booleschen Algebra.

Zum Beweis verwendet man:

Lemma 1: $[A \cup B] = [A] \vee \bigvee_{\varphi \in 2^A} [\{A^\varphi\} \cup B]$, wobei $A^\varphi := \bigvee_{a \in A} a^{\varphi(a)}$ ist.

Corollar: $[A] \in L'$ für jedes endliche A.

Lemma 2: Ist G eine endliche Erzeugendenmenge von L, so ist [G] das (dann existierende) maximale Element von L'.

Das Zentrum $\mathfrak{Z}$ von L ist der Unter-Orthoverband aller $a \in L$ mit: f.a. $b \in L$ gilt $[\{a,b\}] = 0$. In quasiperfekten OMV gilt stets $\mathfrak{Z} \subseteq L'$.

Die Frage nach der Umkehrung führt auf die Definition: Ein OMV heißt *metaboolesch*, wenn jeder Kommutator im Zentrum liegt.

Satz 2: Die endlich erzeugten metabooleschen Verbände sind genau die direkten Produkte endlich vieler direkter Summen von endlich vielen Booleschen Algebren.

Der Beweis ist rein algebraisch. Mittels einer Limes-Konstruktion und eines Kompaktheitsarguments erhält man daraus:

Satz 3: Die metabooleschen Verbände sind genau die subdirekten Produkte von direkten Summen von Booleschen Algebren.

H.SCHWICHTENBERG: Eine Bemerkung über extensionale Versionen der hereditär rekursiven Operationen (HRO)

HRO, HEO, und HRO^E seien definiert wie in Troelstra, Lecture Notes in Math. Bd. 344. Troelstra zeigt dort anhand von speziell für diesen Zweck konstruierten Beispielen, daß HEO und HRO^E verschieden sind, und formuliert das Problem, ob es auch mathematisch interessante Funktionale gibt, die in HEO, aber nicht in HRO^E, oder in HRO^E, aber nicht in HEO liegen. Dieses Problem wird im folgenden Sinn negativ entschieden: Es gilt $HEO/_\sim \cong HRO^E/_\sim$. Dabei bedeutet $/_\sim$ die Faktorisierung nach der jeweils mitdefinierten Äquivalenzrelation.

M.SREBRNY: Singular cardinals and analytic games

I proved the following theorems.

THEOREM 1. $ZFC + (\forall n)(2^{\aleph_n} \leq \aleph_\omega) + (2^{\aleph_\omega} \neq \aleph_{\omega+1}) \vdash \Sigma^1_1$-Determinateness (i.e. every analytic game is determinate).

THEOREM 2. $ZFC + (\forall n)(2^{\aleph_n} \leq \aleph_\omega) + (2^{\aleph_\omega} \neq \aleph_{\omega+1}) \vdash$ every unctble Π^1_1 set of reals has a perfect subset.

In the above, we may replace the hypothesis "$(\forall n)(2^{\aleph_n} \leq \aleph_\omega) \& (2^{\aleph_\omega} \neq \aleph_{\omega+1})$" by a "negative solution of the singular cardinal problem", where by the singular cardinal problem we mean whether it is true that $(\forall \text{singular}\beta)[(\forall\alpha < \beta)(2^\alpha \leq \beta) \rightarrow (2^\beta = \beta^+)$. Expressed otherwise: ZFC + $\neg\Sigma^1_1$-Determinateness $\vdash$ positive solution to all cases of the singular cardinal problem.

To prove these we relativize the argument of Devlin & Jensen's Marginalia (Lecture Notes in Math.). Our proof uses Silver machines. In particular, we construct Silver $L[a]$-machines with the condensation, finiteness and Skolem properties. Then theorems 1 and 2 follow from the Harrington-Martin result: Σ^1_1-Determinateness $\leftrightarrow$ $(\forall a \subseteq \omega)(a^\#$ exists).

H.VOGEL: Sweet nothin's about barinduction

With $sup = \lambda z.\lambda c.z(c0)(\lambda x.c(x+1))+1$ and $Y*u = \lambda c.Y(u*c)\dot{-}1$ we define C_σ by $Y0 = 0 \rightarrow CY = 0$, $Y0 > 0 \rightarrow CY = sup(\lambda u.C(Y*u))$ where $Y \vdash (o \rightarrow o) \rightarrow o$ and $J_{\sigma\tau}$ by $J0GH = G$, $J(sup\ z)GH = H(\lambda u.J(zu)GH)$. Then barrecursion is extensionally definable with C and J and with decidable barinduction, weak continuity and extensionality CI $A[0] \wedge \forall z(\forall uA[zu] \rightarrow A[sup\ z]) \rightarrow \forall Y\ A[CY]$ and CC $C(Y,c,CYc)$ where $C(Y,c,x) \leftrightarrow Y(c|x) \leq x$ is deducible. On the other side the monotone barinduction is deducible in $E\text{-}HA_\omega + CI + CC + AC$. The theory of it. ind.def. is interpretable too. We map the types of Zucker's T_ω into the finite types by $n^- := r(n)$, $(\rho \rightarrow \sigma)^- = \rho^- \rightarrow \sigma^-$, where $r(0) = o$, $r(n+1) = (o \rightarrow r(n)) \rightarrow o$. We get with the sup, modified J, modified CI a true image of T_ω.

H.VOLGER: Bemerkungen über Erhaltungssätze, Interpolationssätze und Approximationssätze

Sei $L(K)$ die Menge der Sätze einer Sprache erster Stufe über K und sei $Str(K)$ die Klasse der K-Strukturen. Für $R \subseteq Str(K_1) \times Str(K_2)$ sei $[\rightarrow R]$ wie folgt definiert: $\varphi_1 [\rightarrow R] \varphi_2$ gdw. $A_1 \models \varphi_1$, $A_1 R A_2$ impliziert $A_2 \models \varphi_2$. Für $\Gamma \subseteq L(K_1) \times L(K_2)$ sei $[\rightarrow \Gamma]$ wie folgt definiert: $A_1 [\rightarrow \Gamma] A_2$ gdw. $A_1 \models \varphi_1$, $\varphi_1 \Gamma \varphi_2$ impliziert $A_2 \models \varphi_2$. Die Operationen $[\rightarrow -]$ bestimmen eine Galoiskorrespondenz:

(1) Wenn Γ unter $\wedge, \vee$ abgeschlossen ist, dann gilt $\Gamma^* = [\rightarrow[\rightarrow \Gamma]]$, wobei $\varphi_1 \Gamma^* \varphi_2$ gdw. $\varphi_1 \vdash \psi_1 \Gamma \psi_2 \vdash \varphi_2$ für gewisse ψ_1, ψ_2.

(2) Wenn R Σ_1^1 im Sinne von Barwise ist, dann gilt $R^* = [\rightarrow[\rightarrow R]]$, wobei $A_1 R^* A_2$ gdw. $A_1 \equiv B_1 R B_2 \equiv A_2$ für gewisse B_1, B_2.

Feferman's Resultat über uniforme Reduktion von Σ_1^1-Relationen ist im folgenden Resultat enthalten:

(3) $[\rightarrow R_1 \circ R_2] = [\rightarrow R_1] \circ [\rightarrow R_2]$, wenn R_1, R_2 Σ_1^1 sind

(4) $[\rightarrow \Gamma_1 * \Gamma_2] = [\rightarrow \Gamma_1] \circ [\rightarrow \Gamma_2]$, wenn Γ_1, Γ_2 abg. unter $\wedge, \vee$ sind, wobei $\varphi_1\ \Gamma_1 * \Gamma_2\ \varphi_2$ gdw. $\varphi_1\ \Gamma_1\ \psi_1 \vdash \psi_2\ \Gamma_2\ \varphi_2$ für gewisse ψ_1, ψ_2.

Flum's Lemma über Konvergenz von Σ_1^1-Relationen liefert folgendes Resultat:

(5) Wenn $R_n \rightarrow R$ im Sinne von Flum, wobei R, R_n Σ_1^1 sind dann $R = \cap\langle R_n \mid n \in \omega\rangle$ und $[\rightarrow R] = \cup\langle[\rightarrow R_n] \mid n \in \omega\rangle$. Wenn $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$ und $\Gamma = \cup\langle\Gamma_n \mid n \in \omega\rangle$, dann $[\rightarrow \Gamma_n] \rightarrow [\rightarrow \Gamma]$.

Diese Methoden können außerdem dazu benutzt werden, die Zusammenhänge zwischen Interpolationssätzen, Erhaltungssätzen und Approximationssätzen (vgl. Harnik) zu untersuchen.

S.S.WAINER: Functionals with predicatively generated 1-sections

Let T_0 be the inductively generated system of functionals (in all finite types) defined by primitive recursion, abstraction, application and autonomous enumeration. We regard the T_0-functionals as the "constructive" ones and view $T_0({}^2E)$ as characterizing the "predicative" functionals. Just as constructivity-considerations lead to continuous functionals, we attempt here to isolate those functionals $\mathfrak{F}$ whose full Kleene 1-sections are predicatively generated. This is always the case when $\mathfrak{F}$ is of type 2, but no longer when $\mathfrak{F}$ has type ≥ 3.

Theorem Suppose $\mathfrak{F}^3$ has the following generalized continuity property: there is a "modulus" $M \in T_0({}^2E)$ such that for every F^2, $M(\mathfrak{F},F)$ gives a countable sequence $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega}$ of reals where

$\forall G^2(\forall n(G(\alpha_n) = F(\alpha_n)) \Longrightarrow \mathfrak{F}(G) = \mathfrak{F}(F))$. Then

$1\text{-sc}({}^2E,\mathfrak{F}) = T_0({}^2E,\mathfrak{F}) \cap {}^{\omega}\omega = L_{\omega_1^{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{F}) \cap {}^{\omega}\omega.$

J.Schulte Mönting, Tübingen

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft