MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 18/1977

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen unter besonderer Berücksichtigung freier Randwertaufgaben

1\. 5. - 7. 5. 1977

Im Mittelpunkt der von J. Albrecht (Clausthal-Zellerfeld), L. Collatz (Hamburg) und G. Hämmerlin (München) geleiteten Tagung stand das gerade in den letzten Jahren stark entwickelte Gebiet der freien Randwertaufgaben mit elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen. Insbesondere interessierten Fragen der numerischen Lösung solcher Probleme, die eine hervorragende praktische Bedeutung haben; dazu gehören Aufgabenstellungen, die sich z. B. beim Studium von chemischen Reaktionen, Diffusionserscheinungen und Flüssigkeitsströmungen sowie der Vermischung von Flüssigkeiten und der Ausbreitung von Wärme ergeben. Weitere Schwerpunkte bildeten die numerische Behandlung von Eigenwertaufgaben und von singulären Randwertproblemen.

Auch die Aufnahme und die Pflege persönlicher Kontakte fiel in der angenehmen Atmosphäre des Oberwolfacher Forschungsinstitutes leicht; die Teilnehmer der Tagung danken den Mitarbeitern des Instituts herzlich für ihre ausgezeichnete Betreuung.

Traditionsgemäß fand unter der Leitung von L. Collatz eine Wanderung statt, die - unter Benutzung der Methode des steilsten Abstiegs - diesmal vom Fohrenbühl nach Schiltach führte.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer

A. Acker (Zürich)
J. Albrecht (Clausthal)
R. Ansorge (Hamburg)
J. Baumeister (Berlin)
K. Böhmer (Karlsruhe)
R. Bulirsch (München)
J. R. Cannon (Austin)
L. Collatz (Hamburg)
V. Comincioli (Pavia)
C. Cryer (Madison)
L. Eichner (Berlin)
C. M. Elliott (Oxford)
H. Esser (Aachen)
K. Glashoff (Hamburg)
F. Goerisch (Clausthal)
R. Gorenflo (Berlin)
G. Hämmerlin (München)
R. Haverkamp (Münster)
W. Held (Clausthal)
J. Hersch (Zürich)
W. Höhn (Darmstadt)
K.-H. Hoffmann (Berlin)
U. Hornung (Münster)
P. Jochum (München)
G. V. Kelly (Cork)
M.-Th. Kohler (Zürich)
H.-J. Kornstaedt (Berlin)
Th. Meis (Köln)
D. Mittelmann (Darmstadt)
H. N. Mülthei (Mainz)
F. Natterer (Saarbrücken)
F. Oberhettinger (Berlin)
G. Opfer (Hamburg)
A. Pignedoli (Bologna)
P. M. Prenter (Fort Collins)
M. Reimer (Dortmund)
P. Rentrop (München)
W. R. Richert (München)
K. Roleff (Hamburg)
A. Sachs (München)
E. Schäfer (München)
H. R. Schwarz (Zürich)
J. Sprekels (Hamburg)
B. Steffen (Göttingen)
W. Törnig (Darmstadt)
W. Velte (Würzburg)
H. J. Weinitschke (Berlin)
B. Werner (Hamburg)
H. Werner (Münster)

Vortragsauszüge

A. ACKER: Free boundary optimization problems

These results are isoperimetric inequalities involving capacitance on regions of a general character. Define the capacitance K of a simply connected region $\Omega \subset [0,1] \times R$ (bounded relative to $[0,1] \times R$ by disjoint Jordan arcs Γ^* and Γ) by $K = \int_\gamma |\nabla U(p)| \cdot |dp|$, where $U(p)$ is harmonic on Ω and satisfies $U=1$ on Γ^*, $U=0$ on Γ, $D_x U=0$ on $\Omega \cap (\{0,1\} \times R)$ and γ is an equipotential curve of U. Let $S^* \supset \Gamma^*$ and $S \supset \Gamma$ be the components of $([0,1] \times R) \setminus \Omega$, and define $|S| = \iint_S a^2(p)\,dxdy$ and $|S|^* = \iint_S (a^*(p))^2 dxdy$, where $a(p), a^*(p) > 0$ are continuous. Problem: Given any partition $\{S_o^*, \Omega_o, S_o\}$ of $[0,1] \times R$, we seek Ω which minimizes K subject to the constraint that (*) $|S \setminus S_o| - |S_o \setminus S| \geqq |S_o^* \setminus S^*|^* - |S^* \setminus S_o^*|^*$. Solution:
If (1) $a(p)\uparrow$ and $a^*(p)\downarrow$ in y on the lines $y = y_o + Nx$, $y_o \in R$, $|N| \geqq N_o$ and (2) $\exists$ $B>0$ such that $a(p) > a^*(p)$ on $[0,1] \times [B,\infty)$, $a(p) < a^*(p)$ on $[0,1] \times (-\infty,-B]$, then: (a) For any $c>0$ $\exists$ a region Ω_c such that the continuous extension of $|\nabla U_c(p)|$ to $CL(\Omega_c)$ satisfies $|\nabla U_c(p)| = c \cdot a(p)$ on Γ_c and $|\nabla U_c(p)| = c \cdot a^*(p)$ on Γ_c^*. (b) Given a partition $\{S_o^*, \Omega_o, S_o\}$, there is a $c>0$ such that $|S_c \setminus S_o| - |S_o \setminus S_c| = |S_o^* \setminus S_c^*|^* - |S_c^* \setminus S_o^*|^*$. The region Ω_c solves the problem, i. e. $K \geqq K_c$ for any region Ω satisfying (*). Abstracts for further results to be presented are 76T-B177, 76T-B194, 77T-B11 in A. M. S. Notices.

J. BAUMEISTER: Ein Iterationsverfahren zur Lösung eines parabolischen freien Randwertproblems

Wir geben zu einem einfachen freien Randwertproblem (eindimensional, eine Phase) ein Iterationsverfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung an. Dieses Verfahren ist ein Gradientenverfahren für ein geeignet definiertes Optimierungsproblem. Dazu wird u. a. gezeigt, daß die Lösung differenzierbar vom freien Rand abhängt.

Für einen Spezialfall zeigen wir, daß die Lösungen geeigneter Diskretisierungen des Problems gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems konvergieren. Einige numerische Ergebnisse illustrieren die Resultate.

K. BÖHMER: Defekt-Korrekturen für Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Eine allgemeine Methode zur näherungsweisen Lösung von Funktionalgleichungen $F(y)=0$ wird am Beispiel gewöhnlicher Randwertprobleme vorgestellt: Das Problem wird diskretisiert. Der diskrete Näherungswert $\eta_{h,0}$ wird zu einer kontinuierlichen Näherung y_0 fortgesetzt. Der mit dieser Näherung berechnete Defekt $F(y_0)$ gestattet die Definition eines Nachbarproblems (N. P.) $F(z)=F(y_0)$ mit der exakten Lösung y_0. Dieses N. P. wird mit dem ursprünglichen Diskretisierungsverfahren näherungsweise durch $\xi_{h,0}$ gelöst. Der so gewonnene, bekannte Fehler $\xi_{h,0}-\eta_{h,0}$ dient als Schätzung für den unbekannten Fehler zwischen $\eta_{h,0}$ und y. Damit wird $\eta_{h,1}:=\eta_{h,0}-(\xi_{h,0}-\eta_{h,0})$ i. a. eine bessere Näherung sein als $\eta_{h,0}$. Durch Iteration erhält man Verfahren immer höherer Ordnung. Beziehungen zu Verfahren von Zadunaisky, Stetter, Frank, Hertling, Überhuber werden diskutiert.

J. R. CANNON: Free boundary problems for parabolic partial differential equations

Free boundary value problems for parabolic equations divide into two types: Explicit or Implicit. The Stefan problem for one space variable is an example of the explicit type while the problem of fast chemical reactions (two chemicals diffusing toward each other and reacting instantaneously) is an example of the implicit type. The talk began with a description of the recent results of Cannon, Henry and Kotlow on the two phase Stefan problem in one space variable. The results of Friedman (Northwestern U.) and Schaefer concerning the analyticity and the infinite differentiability of the free boundary of the Stefan problem were briefly mentioned along with the new results of Evans and Kotlow (U. of Kentucky) concerning the quasi-linear case of the two phase Stefan problem in one space variable. Results of Friedman and Kinderlehrer (U. of Minnesota) and Caffarelli and Riviere (U. of Minnesota) for the n-dimensional Stefan problem were discussed and some of the methods of proof were illustrated in the discussion of the work of Cannon, Fasano (Bari, Italia) and Hill (Stoney Brook,N.Y.) on the problem of fast chemical reactions. The talk was concluded with a discussion of the results of the work of Cannon and Fasano on the classical Muskat Problem which is a model for the flow of two immiscible fluids in a porous medium.

V. COMINCIOLI: Numerical analysis of some free boundary problems related to the flow through porous media

A review of some free boundary problems related to the fluid flow through porous media studied at the Laboratory of Numerical Analysis of CNR at Pavia is given. Next more in details is treated a particular problem concerning the study of salt-water intrusion into a coastal aquifer in the presence of pumping wells. In this problem there are two free boundaries: the line separating the fresh water and the air and the one between fresh and salt water. One of the practical interesting problems is to find what is the maximum rate discharge of the wells without the salt water enters into the wells. By means of a suitable Baiocchi transformation , the problem is reduced to a quasi-variational inequality. Existence and uniqueness of the solution are proved. Actually the solution is the limit of two sequences, resp. monotonically decreasing and increasing, of solutions of suitable variational inequalities. From the limit function it can be easily deduced the flow region, the free boundaries, the streamlines, the equipotential lines, the discharges of the wells. Some numerical results, concerning one and two wells, are given.

C. W. CRYER: Die numerische Lösung der rotationssymmetrischen freien Randwertaufgabe eines Brunnens

Die freie Randwertaufgabe für einen Brunnen vom Radius r_w und Wassertiefe h_w in einer Grundscheibe vom Radius R, Tiefe H und Leitfähigkeit $k(r,y)$ läßt sich folgendermaßen formulieren: Man sucht $\psi \epsilon C^1 [r_w,R]$ und $u \epsilon C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, damit

$$(rku_r)_r + (rku_y)_y = 0, \qquad \text{in } \Omega,$$

$$\begin{array}{lll} u(R,y) & = H, & 0<y<H \\ u_n(r,0) & = 0, & r_w<r<R \\ u(r,y) & = h_w, & 0<y<h_w \\ u(r,y) & = y, & h_w<y<H \\ u(r,\psi(r)) & = y, & r_w<r<R \\ u_n(r,\psi(r)) & = 0, & r_w<r<R \end{array}$$

wobei

$$\Omega = \{(r,y) : r_w<r<R \quad \text{und } 0<y<\psi(r)\}.$$

Mit Hilfe der Resultate von Benci bekommt man eine Variationsungleichung und Existenz und Eindeutigkeit folgen. Das Problem wird mit linearen finiten Elementen approximiert, und es wird bewiesen, daß die Fehler im Sobolevraum H^1 von der Ordnung $O(h)$ sind.

C. M. ELLIOTT: Moving boundary problems and linear complementarity

Moving boundary problems occur in many physical situations posing theoretical problems of existence and uniqueness as well as the more practical problem of numerical solution. A certain class of free boundary problems may be formulated in such a way as to ignore, explicitly, the unknown surface. This formulation is not only amenable to mathematical analysis but also leads to a computationally convenient natural discretisation. One can observe that a number of one phase free boundary problems can be written as a set of partial differential equations and inequalities in the form of continuous linear complementarity problems. (L.C.P.'s). In variational form an L.C.P. becomes a variational inequality. In this talk the approximation of such problems is described.

H. ESSER: Stabilitätsungleichungen für Diskretisierungen von Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen

Für Diskretisierungen von 2-Punkt Randwertaufgaben bei linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung werden Stabilitätsungleichungen für die Differenzenquotienten $\sum_{i=0}^{n-1} \|D_h^i\, y_h\|_{h,\infty}$ (in der Max-Norm) durch diskrete L_1-Normen der rechten Seiten bewiesen (woraus die Abschätzungen in der L_p-Norm, $1\leq p\leq\infty$, folgen). Diese Aussagen ergeben scharfe Abschätzungen für den Fehler $y-y_h$ sowie von $Py-P_hy_h$ (in der Max-Norm) durch die diskrete L_1-Norm des Abbruchfehlers, wobei P_h eine konsistente Differenzenapproximation des Differentialoperators m-ter Ordnung P ($m\leq n-1$) ist. Ferner werden mit Hilfe der obigen Ungleichung auch scharfe Konvergenzordnungsaussagen für den Fall bewiesen, daß die exakte Lösung lokalen Lipschitzbedingungen genügt. Dies wird durch Beispiele belegt.

K. GLASHOFF: Monotonieverhalten des freien Randes

Es wurde das eindimensionale Stefan-Problem behandelt und gezeigt, wie man Einschließungen für die Lösung und den freien Rand gewinnen kann. Dies geschieht mit Hilfe eines Satzes über die inverse Monotonie beim Stefan-Problem, der unter Anwendung der Baiocchi-

Transformation mit Hilfe des Hopf'schen Maximumprinzips bewiesen wurde. - Der Vortrag beruht auf einer gemeinsam mit B. Werner (Hamburg) verfaßten Arbeit.

F. GOERISCH: Über Quotienten-Einschließungssätze für Eigenwerte bei allgemeinen Eigenwertaufgaben

Der bei speziellen Eigenwertaufgaben der Form $My=\lambda y$ bewährte Quotienten-Einschließungssatz wird auf allgemeine Eigenwertaufgaben der Form $My=\lambda Ny$ übertragen (M, N symmetrische Operatoren in einem Prähilbertraum). Es ergeben sich dabei zwei Einschließungssätze, die recht allgemeine und einfach zu überprüfende Voraussetzungen machen. Zur Anwendung dieser Sätze ist es nicht nötig, ein Paar F_o, F_1 mit der Eigenschaft $MF_1=NF_o$ zu ermitteln. Einer der beiden aufgestellten Einschließungssätze benutzt als wesentliche Voraussetzung, daß N von monotoner Art ist. Diese Voraussetzung ist sogar notwendig für die behauptete Einschließungsaussage. - Die Ergebnisse werden an einigen Beispielen erläutert, insbesondere an solchen, in denen M und N Differentialoperatoren sind.

R. GORENFLO: Konservative Differenzenschemata für Diffusionsprobleme

Rechnende Physiker und Ingenieure stören sich manchmal daran, daß die von ihnen benutzten Differenzenverfahren nicht einem strengen Analogon der Massenerhaltung genügen. Im Vortrag wird eine Konstruktionsmethode für explizite und implizite Schemata vorgestellt, die diskret sowohl Masse als auch Nichtnegativität erhalten, und auf die Fragen der Genauigkeitsordnung und der Konvergenz wird eingegangen. Zur Illustration dienen Gleichungen

$$u_t=(a(x)u)_{xx}+(b(x)u)_x \text{ und } u_t=(a(x)u_x)_x \text{ in } (0,1)\times(0,\infty)$$

unter Periodizitätsbedingungen oder Reflexionsrandbedingungen und Interface-Bedingungen. Verallgemeinerungen auf Probleme $\gamma(x)u_t=(a(x)u_x)_x$ mit $\int_0^1 \gamma(x)u(x,t)dx$ als Erhaltungsgröße und auf nichtlineare Probleme werden angedeutet.

R. HAVERKAMP: Numerische Lösung von Sturm-Liouville Problemen mit einer Singularität vom Fuchsschen Typ

Zur Lösung der Randwertaufgabe

$$-(pu')'+qu=f \quad \text{auf } I=(0,1), \quad u(0)=0, \; u(1)=0$$

ist nach J. A. Nitsche [Num. Math. 25 (1976)] die Ritz-Methode mit Polynomsplineräumen nicht geeignet, wenn im Randpunkt 0 eine Singularität vom Fuchsschen Typ vorliegt. Die exakte Lösung $\hat{u}$ hat die Form

$$\hat{u}(x)=x^r v(x)+x^s w(x), \qquad x\in[0,1]$$

mit "glatten" Funktionen v und w. Indem man diese Form von $\hat{u}$ bei der Wahl der Approximationsräume berücksichtigt, erreicht man eine Konvergenzordnung, die sich von der im regulären Fall höchstens um 1/2 unterscheidet.

J. HERSCH: Isoperimetrische Schranken für die Gebietsabhängigkeit einiger Funktionale

Seien $G\subset\tilde{G}$ zwei einfach zusammenhängende ebene Gebiete; welche Ungleichungen gelten zwischen Gebietsfunktionalen von G und $\tilde{G}$ und dem Modul $\mu=\mu(\tilde{G}-G)$ des zweifach zusammenhängenden Gebietes $\tilde{G}-G$? Für die Gebietsfunktionale λ_1 (erster Eigenwert der eingespannten Membran) und P (Torsionssteifigkeit) leiten wir aus Variationsformeln vom Typus von Poincaré-Rayleigh-Hadamard-Schiffer die Ungleichungen $\lambda_1(\tilde{G})\leq\lambda_1(G)e^{-4\pi\mu}$ bzw. $P(\tilde{G})\geq P(G)e^{8\pi\mu}$ her. Im Beweis der ersten benutzen wir eine Ungleichung von Payne-Rayner, sowie für N>2 Dimensionen ihre Erweiterung durch M.-Th. Kohler-Jobin. Zwei Sätze von Pólya-Szegö $\lambda_1\leq j_0^2/\dot{r}^2$ und

$P \geq (\pi/2)\dot{r}^4$ entsprechen dem Grenzfall G = infinitesimaler Kreis. - Im Fall zweier konzentrischer Kreise gilt überall das Gleichheitszeichen. - Ähnlich ergibt sich die Identität

$$\oint_{\zeta\in\partial G}\left[\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial n_\zeta}\right]^2 h_z(\zeta)\,|d\zeta| \equiv \frac{1}{2\pi}$$ (h_z=Stützfunktion in z) und

daraus eine Fehlerschranke zu einer angenäherten Lösung des Dirichletschen Problems.

W. HÖHN: Differenzenverfahren beim Stefan-Problem. Beweis einer Konvergenzordnung

Zur numerischen Lösung des einfachsten Stefan-Problems, des Einphasenproblems, wird ein explizites, von 2. Ordnung konsistentes Differenzenverfahren vorgeschlagen. Um ein festes Gitter zu erreichen, wird das Problem zunächst einer Standardtransformation unterzogen. Eine besondere Approximation am Rande sichert auch Konsistenz 2. Ordnung für die Energiebedingung. Mit Hilfe von Apriori-Abschätzungen für die Lösungen des diskreten Systems wird eine majorisierende Gitterfunktion für den Fehler gefunden. Sie läßt sich schließlich mit Hilfe der Lösung einer Abelschen Integralgleichung 2. Art abschätzen, so daß auch Konvergenz der Ordnung 2 gesichert ist.

K.-H. HOFFMANN: Monotonie bei nichtlinearen Stefanproblemen

Von G. W. Evans [1950] wurde gezeigt, daß für das einfache Stefan-Problem

$$\begin{aligned}
&u_{xx} - u_t = 0 &&, \quad t>0,\ 0<x<s(t),\\
&u(s(t),t) = 0 &&, \quad t>0,\\
&u_x(0,t) = -1 &&, \quad t>0,\\
&\dot{s}(t) = -u_x(s(t),t) &&, \quad t>0,\\
&s(0) = 0 &&,
\end{aligned}$$

eine Lösung existiert, die man durch das Iterationsverfahren

$$s_{n+1}(t):=t-\int_{0}^{s_n(t)} u(x,t;s_n)dx$$

berechnen kann. Dabei ist $u(x,t;s_n)$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung in dem festen Gebiet

$$G:=\{(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ | 0<x<s_n(t),\ t>0\}$$

und $s_n(0)=0$.

Wir zeigen, daß für ein von W. T. Kyner [1959] betrachtetes nichtlineares Stefan-Problem ein analoges Iterationsverfahren Einschließungen der Lösung liefert. Dazu verwenden wir die Theorie der monoton zerlegbaren Operatoren (vgl. L. Collatz [1964]).

U. HORNUNG: Eine steif-stabile Methode zur numerischen Simulation von nicht-stationären Wasser-Flüssen in gleichzeitig gesättigten und ungesättigten Böden

Anfangsrandwertaufgaben für die nichtlineare Fokker-Plancksche Differentialgleichung $\frac{\partial b(p)}{\partial t}=\nabla(K(p)\nabla p)$ mit monotonem b und positivem K lassen sich als Evolutionsgleichungen $\dot{u}(t)\in Au(t)$ mit mengenwertigen Operatoren A auffassen. Diese Operatoren haben in geeigneten Hilbert- bzw. Banachräumen Monotonie- bzw. Akkretivitätseigenschaften, aus denen sich Existenzsätze ergeben. Die nach der Linienmethode diskretisierten Probleme können, wie an praktischen Beispielen gezeigt wird, mit Rückwärts-Differentiationsformeln numerisch gelöst werden.

G. V. KELLY: Laplace boundary-value problems - A new approach

The solution of some linear boundary-value problems for a rectangle by the separation of variables gives rise to two sets of linearly independent harmonic functions which are zero respectively on pairs of opposite sides. The present paper shows how to obtain these functions for quadrilateral and other four-sided simply-connected regions. Linear combinations of these functions are then taken as approximate solutions to some Dirichlet boundary value problems and numerical details of the results are supplied. Some applications to three-dimensional domains are also given.

M.-Th. KOHLER: Eine isoperimetrische Monotonieeigenschaft, die mehrere klassische Sätze enthält

Sei G ein Gebiet im R^N mit λ_1 als erster Eigenwert; und sei $\alpha<\lambda_1$. Man betrachtet folgendes Randwertproblem

$$\Delta V+\alpha V+1=0 \text{ im } G, \quad V=0 \text{ auf } \partial G.$$

$Q(\alpha)=\int_G V dx$ ist die Gleichgewichtsenergie dieses Problems. Sei $R(\alpha)$ der Radius der Kugel mit derselben Energie $Q(\alpha)$. Die Funktion $R(\alpha)$ ist abnehmend. Dieser Satz enthält für N=2 diejenigen von Rayleigh-Faber-Krahn $\lambda_1 A\geq\pi j_o^2$, d. h. $R(-\infty)\geq R(\lambda_1)$, Saint-Venant und Pólya $A^2\geq 2\pi P$ (wobei P die Torsionssteifigkeit ist), d. h. $R(-\infty)\geq R(0)$, und beweist eine Vermutung von Pólya und Szegö $P\cdot\lambda_1^2\geq\frac{\pi}{2} j_o^4$, d. h. $R(0)\geq R(\lambda_1)$. Er verallgemeinert weitere Ergebnisse von Pólya, Szegö, Payne, Rayner und Bandle.

Th. MEIS: Mehrzielmethode und singuläre Störungen bei Randwertaufgaben

Randwertprobleme der Art

$$\varepsilon^2 u''(x)=P(u'(x),u(x),x), \quad u(a)=\alpha, \quad u(b)=\beta$$

und $0<\varepsilon<<1$ werden meistens mit Differenzenverfahren gelöst (vgl. etwa L. R. Abrahamsson, H. B. Keller, H. O. Kreiss, Numer. Math. 22 (1974). Dabei ergibt sich ein Fehler von der Ordnung $O(\varepsilon+h)$. An Hand einer Reihe von Beispielen möchte ich zeigen, daß man solche Aufgaben auch mit der Mehrzielmethode behandeln kann. Man muß die Aufgabe allerdings in mehrere Teilaufgaben zerlegen. Eine Teilaufgabe ist das reduzierte Problem ($\varepsilon=0$). In vielen Fällen bereitet es keine besonderen Schwierigkeiten. Hinzu kommen ein oder mehrere Grenzschichtprobleme. Man sieht sie zweckmäßigerweise als freie Randwertaufgaben an. Sie lassen sich mit der Mehrzielmethode lösen, wenn man einige besondere Vorkehrungen trifft. Ein Homotopieverfahren ist nicht notwendig. Die Ergebnisse sind sehr genau (relativer Fehler 10^{-6} bis 10^{-10}).

H. D. MITTELMANN: Einige Bemerkungen zur numerischen Lösung nichtlinearer Variationsungleichungen

Die Variationsungleichung

$$\int_R \sum_i \alpha_i(\nabla u)(u-v)_{x_i} \, dx \leq 0, \quad \alpha \text{ lokal koerzitiv}$$

$$v \in K = \{v \in W^{1,\infty}, v \geq \psi, v|_C = f\}$$

wird mit Hilfe linearer finiter Elemente näherungsweise gelöst. Für eine unmittelbare Diskretisierung auf einer regulären Triangulation des nicht notwendig konvexen Gebietes wird lineare Konvergenz in $W^{1,2}$ sowie eine $O(h|\log h|^{1/2})$-Abschätzung in der Maximumnorm ($n=2$) bewiesen. Insbesondere wird das Minimalflächenproblem betrachtet. Die Lösung wird mit einem modifizierten nichtlinearen Relaxationsverfahren berechnet, dessen Konvergenz gezeigt wird.

F. NATTERER: Berechnung der Norm der Ritz-Projektion auf Finite Elemente

Das Dirichlet-Problem für $-\Delta u=f$ in $\Omega \leq R^2$ wird durch die Methode der Finiten Elemente mit stückweise linearen Ansatzfunktionen S_h gelöst. Ist u_h die Näherungslösung, so gilt in irgendeiner Norm $\|\cdot\|$

$$\|u-u_h\| \leq (1+\|P_h\|) \inf_{v\in S_h} \|u-v\|$$

wo P_h die Ritz-Projektion bedeutet, d. h. $u_h=P_h u$.

Ist $\|\cdot\|$ eine Seminorm mit

$$\left|\int_\Omega \nabla u^T \nabla v \, dx\right| \leq \|u\| \, \|v\|' \qquad \forall\, u\in W^{1,\infty}(\Omega) \quad \forall\, v\in S_h,$$

so gilt

$$\|P_h\| \leq \gamma_h = \sup_{u\in S_h} \inf_{v\in S_h} \frac{\|u\| \cdot \|v\|'}{\int_\Omega \nabla u^T \nabla v \, dx} .$$

Diese Ungleichung wird zur numerischen Berechnung oberer Schranken für $\|P_h\|$ in den Räumen $W^{1,\infty}(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ benutzt. Es zeigt sich, daß γ_h in $W^{1,\infty}(\Omega)$ nicht von der Geometrie von Ω und kaum von der Ungleichmäßigkeit der S_h zugrunde liegenden Triangulierung abhängig ist.

P. M. PRENTER: <u>Collocation-discrete least squares schemes for partial differential equations</u>

Discrete least squares and collocation schemes for elliptic partial differential equations on product domains in cylindrical coordinates (i. e. circles, annuli, rectangles, cylinders) are discussed and shown to be equivalent for nonsingular discrete least squares. An existence-uniqueness theory for collocation applied to bounded, invertible 2nd order operators with bounded inverse and variable coefficients is presented for collocation using tensor product, bicubic hermite splines in the coordinate system of the domain of the operator. Optimal L^2 and L^∞ error analysis is discussed and an illustration is given using the "Laplace" equation $u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}+c(\rho,\theta)u=f(\rho,\theta)$ in polar coordinates on disk and annulus without radial symmetry. The arguments generalize to higher order equations, smoother approximating splines, and other distributions of collocation points.

P. RENTROP: <u>Eine Taylorreihenmethode zur numerischen Lösung von Zwei-Punkt-Randwertproblemen mit Anwendung auf singuläre Probleme der nichtlinearen Schalentheorie</u>

Zur numerischen Lösung nichtlinearer Zwei-Punkt-Randwertprobleme aus den Ingenieurwissenschaften, den Wirtschaftswissenschaften und der Raumfahrttechnik wird die Mehrzielmethode mit Erfolg eingesetzt. In diesem Vortrag wird eine Modifikation der Mehrzielmethode vorgestellt, die für spezielle Probleme weniger Rechenzeit erfordert. Dazu wird die Lösung im gesamten Integrationsintervall durch Potenzreihen approximiert. Durch den Einsatz von Unterprogrammen für elementare Taylorreihenoperationen lassen sich die Reihenkoeffizienten rekursiv auf einem Rechner bestimmen. Die analytische Vorarbeit wird dadurch wesentlich reduziert. An sechs singulären Beispielen aus der nichtlinearen Schalentheorie, der Atomphysik und der Chemie wird die Effizienz des Verfahrens vorgeführt. Das Stabilitätsproblem der dünnen Kugelschale wird vollständig behandelt.

E. SCHÄFER: <u>Eine Variante der Truncation-Methode für Stefan-Probleme</u>

Bei der Diskretisierung freier Randwertaufgaben nach Ciavaldini [1975] hat man beim Übergang von der (n-1)-ten zur n-ten Zeitschicht ein Ungleichungssystem zu lösen zur Bestimmung der Temperaturverteilung auf der n-ten Zeitschicht. Das Ungleichungssystem hat die spezielle Struktur $\underline{M}x \le (A+\psi)x \le \overline{M}x$ mit einer M-Matrix A und einer stetigen isotonen Diagonalabbildung ψ. Wir zeigen die Konvergenz von SOR-Verfahren zur Lösung von Ungleichungssystemen $\underline{M}x \le Fx \le \overline{M}x$ mit einer M-Funktion F unter geeigneten

Voraussetzungen an die Schrankenfunktionen $\underline{M}$ und $\overline{M}$. Die Anwendung der Truncation-Methode für freie Randwertaufgaben wird an Beispielen demonstriert.

J. SPREKELS: Automatisierbare Methoden zur punktweisen Einschließung bei superlinearen Randwertaufgaben

Es werden superlineare Hammersteinoperatoren

$Tx(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds,\ t\in[0,1]$, betrachtet. $G(t,s)$ ist auf $[0,1]^2$ stetig und in $(0,1)^2$ positiv, $f(t,x)$ auf $[0,1]\times\mathbb{R}_+$ stetig und nichtnegativ.

Ausgehend von einem geeigneten Startkegel K_0 wird iterativ eine Folge von Teilkegeln K_n des Kegels $C_+[0,1]$ konstruiert mit: $TK_{n-1}\subset K_n\subset K_{n-1}, n\in\mathbb{N}$. Der Fixpunktsatz von M. A. Krasnosel'skii über Expansionen von Kegeln liefert einen Fixpunkt $\hat{x}\neq\theta$ von T in $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

Unter geeigneten Voraussetzungen - die z. B. bei Randwertaufgaben 2. Ordnung von monotoner Art erfüllt sind - ist die Iterationsvorschrift nur von endlich vielen Parametern abhängig und somit in algorithmischer Form auf dem Computer durchführbar. Gleichzeitig erhält man punktweise Schranken für $\hat{x}$, die sich schrittweise verbessern.

Numerische Beispiele und Hinweise auf weitere Anwendungsmöglichkeiten des Verfahrens werden gegeben.

B. STEFFEN: Die Berechnung von Gleichgewichtskonfigurationen eines Plasmatorus als Optimierungsaufgabe

Die Gleichgewichtskonfiguration eines rotationssymmetrischen Plasmatorus wird bestimmt, indem das Quadratintegral der Differenz zwischen dem magnetischen Druck auf der Außenseite der Oberfläche und der Summe aus magnetischem und Gasdruck auf der Innenseite minimiert wird. Dabei wird die Schnittkurve C der Oberfläche mit der x-y-Ebene in der Form $C=\{(x(\psi),y(\psi))\}$ mit

$$x(\psi)=M+\sum_{k=0}^{N} a_k \cos k\psi \cos \psi, \quad y(\psi)=\sum_{k=0}^{N} a_k \cos(\psi)\sin\psi$$

parametrisiert. Dabei reicht die Wahl N=4 in der Regel aus, um den Rand auf sechs Stellen genau zu bestimmen. Das Magnetfeld wird dabei nach einer Integralgleichungsmethode von Martensen mit je 13 Stützstellen auf dem freien Rand und auf dem äußeren Leiter berechnet.

K.Roleff (Hamburg)