MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 2/1978

Modelltheorie der Gruppen

8.1. bis 14.1.1978

Die sehr erfolgreiche diesjaehrige Logiktagung in Oberwolfach (die erste ueber die Thema „Modelltheorie der Gruppen") stand unter der Leitung von Prof. Dr. U. Felgner (Tuebingen), Prof. Dr. O. Kegel (Freiburg) und Prof. Dr. E.-J. Thiele (Berlin).

Die Tagung war gut besucht, und zwar von Teilnehmern von 21 Universitaeten und aus 6 Laenden.

Von ungewoehnlich hohem Niveau waren die meisten der 19 Vortraege, die zum Teil ueber mehrere Stunden intensiv behandelt wurden. Sie umfassten eine grosse und anregende Auswahl von Themen, und eine grosse Menge neuer Materialen wurde angeboten.

Teilnehmer

Baur, Dr. W.	Zuerich/CH
Boone, Prof. Dr. W. W.	Bonn
Buecken, Hans	Aachen
Collins, Prof. Dr. D. J.	London/GB
Deissler, Dr. R.	Freiburg/Br.
Eklof, Prof. Dr. P. C.	Irvine/U.S.A.
Felgner, Prof. Dr. U. (Tag.-Ltg.)	Tuebingen
Flannagan, Dr. T. B.	Berlin
Giorgetta, D.	Zuerich/CH
Haley, Prof. Dr. D.	Mannheim
Heineken, Prof. Dr. H.	Wuerzburg
Henrard, Prof. Dr. P.	Louvain-la-Neuve/B
Herrmann, Dr. Chr.	Darmstadt
Hesse, Gerhard	Hannover
Hodges, Prof. Dr. W.	London/GB
Huber, Dr. M.	Zuerich/CH
Huber-Dyson, Prof. Dr. Verena	Zuerich/CH
Kegel, Prof. Dr. O. H. (Tag.-Ltg.)	Freiburg/Br
Koppelberg, Dr. B. J.	Berlin
Koppelberg, Prof. Dr. Sabine	Berlin

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer (Forts.)

Levin, Prof. Dr. F.	Bochum
Lockhart, Jody	Bonn
Makowsky, Dr. J. A.	Berlin
Mathias, Prof. Dr. A. R. D.	Cambridge/GB
Moore, Vardeman G.	Bonn
Plesken, Dr. W.	Aachen
Podewski, Prof. Dr. K.-P.	Hannover
Potthoff, Prof. Dr. K.	Kiel
Reineke, Prof. Dr. J.	Hannover
Richter, Prof. Dr. M. M.	Aachen
Rogers, Dr. Patricia K.	Downsview/Canada
Rosenberger, Prof. Dr. G.	Dortmund
Schmid, Prof. Dr. J.	Bern/CH
Schmitt, Prof. Dr. P. H.	Heidelberg
Schulte-Moenting, Dr. J.	Tuebingen
Six, Bernhard	Heidelberg
Thiele, Prof. Dr. E.-J. (Tag.-Ltg.)	Berlin
Volger, Dr. H.	Tuebingen
Wenzel, Prof. Dr. G. H.	Mannheim
Wilson, Prof. Dr. J. S.	Cambridge/GB
Ziegler, Dr. M.	Berlin

VORTRAGSAUSZÜGE

D. J. COLLINS: Small Cancellation Theory

Shelah's construction of a Jonsson group (a group of cardinality $\kappa \geq \aleph_1$ whose proper subgroups are of cardinality less than κ) employs a result from the theory of small cancellation groups, viz,

If G/N is a suitable small cancellation quotient of the amalgamated free product $G = K \underset{H}{*} L$, then the canonical map $\pi : G \to G/N$ is injective on $K \cup L$.

We give a summary of the concepts required to formulate this result (which is due to P. Schupp) in a precise way and an indication of the main ingredients which go into its proof.

R. DEISSLER: Existentiell abgeschlossene lokal endliche Gruppen

Es wird ein modelltheoretischer Beweis des folgenden Satzes von Macintyre und Shelah (Journal of Algebra, 43, 1976) gegeben.

Satz. Für jede überabzählbare Kardinalzahl κ gibt es 2 existentiell abgeschlossene lokal endliche Gruppen der Mächtigkeit κ ; ist κ regulär, so gibt es 2^{κ} solche Gruppen, die paarweise nicht einbettbar sind.

Der Beweise für die Existenz von mindestens zwei nicht isomorph existientiell lokal endliche Gruppen in jeder Mächtigkeit grösser als $\aleph_1$ benutzt die Methode der Indiscernibles von Ehrenfeucht-Mostowski, auf die etwas genauer eingegangen wird. Der Beweis der vollen Resultats benutzt einen Satz von Shelah über Stabilität.

P. EKLOF: Abelian Groups and Stationary Logic

This is a report of joint work with Alan Mekler.

Let κ be a regular, non-weakly compact, uncountable cardinaland $D(\kappa)$ be the Boolean algebra of the power set of κ modulo the ideal of non-stationary sets. For each $\tilde{E} \in D(\kappa)$

we consider the language $L^{\tilde{E}}_{\infty\kappa}(aa)$, where the semantics (for a κ-free group $A = \bigcup_{\nu<\kappa} A_\nu$) is defined by the usual rules plus: $A \models_{\tilde{E}} aa\Delta\varphi$ if and only if the class

$$\{\nu<\kappa \mid \langle A, A_\nu\rangle \models_{\tilde{E}} \varphi\}$$

contains φ. Say that A is $\tilde{E}$-equivalent to B if they h both satisfy the same sentences of $L^{\tilde{E}}_{\infty\kappa}(aa)$. We give examples of expressibility in this language, e.g., "free" is expressible in the language $L^{1}_{\infty\kappa}(aa)$. Using a back-and-forth criterion of Makowsky we give an algebraic criterion for $\tilde{E}$-equivalence of $L_{\infty\kappa}$-free groups and use it to construct examples; e.g., to show that "free" is not expressible in $L^{\tilde{E}}_{\infty\kappa}(aa)$ if $\tilde{E} \neq 1$ $(= \tilde{\kappa})$. We prove that A and B are $\tilde{E}$-equivalent for all $\tilde{E} \in D(\kappa)$ if and only if A and B are quotient-equivalent (i.e., they have filtrations $A = \bigcup_{\nu<\kappa} A_\nu$, $B = \bigcup_{\nu<\kappa} B_\nu$ such that $A_{\nu+1}/A_\nu \cong B_{\nu+1}/B_\nu$ for all $\nu<\kappa$). Assuming V = L, we construct large numbers of non-isomorphic quotient-equivalent groups.

P. EKLOF: Definability in Infinitary Model Theory of Abelian Groups

We say that a κ-free group A is κ-separable if every subset of A of cardinality less than κ is contained in a direct summand of A of cardinality less than κ. We consider the question of whether the class Δ_κ of κ-separable groups is definable in $L_{\infty\lambda}$. Assuming V = L, Δ_κ is not definable in $L_{\infty\infty}$ but, assuming the existence of a strongly compact cardinal, Δ_κ is definable in $L_{\infty\infty}$. Δ_κ is definable in $L_{\infty\kappa}$ if and only if every $L_{\infty\kappa}$-free group is κ-separable. We present the proof of a recent theorem of Shelah that there is an $L_{\infty\omega_1}$-free group which is not ω_1-separable.

U. FELGNER: Some Modeltheory of FC-Groups.

Einerseits ist die Theorie der abelschen Gruppen entscheidbar, die Theorie aller Gruppen jedoch unentscheidbar. Eine Verbesserung stammt von Malcew: die Theorie der Gruppen der Nilpotenzklasse 2 ist unentscheidbar. Mit dem folgenden Satz kommen wir noch enger an die Klasse der abelschen Gruppen heran:

Satz: Die Theorie derjeniger Gruppen G mit endlicher abelscher Faktorgruppe $G/Z(G)$ ist unentscheidbar.

Weitere Ergebnisse: die Theorien der FC-Gruppen und der BFC-Gruppen sind unentscheidbar. Jede Δ_2-Aussage, die in allen endlichen Gruppen gilt, gilt in allen periodischen FC-Gruppen. Interessant ist ferner, daß in der Klasse der FC-Gruppen manche Untergruppen (wie beispielweise das Hyperzentrum) 1. Stufe definierbar sind, die im Allgemeinen keineswegs 1. Stufe definierbar sind.

D. GIORGETTA; Beschränkte Klassen von Gruppen

Sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse abstrakter Gruppen, κ eine unendliche Kardinalzahl. $\mathfrak{K}$ hat die Schranke κ, falls jede Gruppe aus $\mathfrak{K}$ isomorph ist zu eine Gruppe von Permutationen, die weniger als κ Elemente bewegen. $\mathfrak{K}$ heisst beschränkt, falls $\mathfrak{K}$ eine Schranke hat.

Satz. Für eine elementare Klasse $\mathcal{E}$ von Gruppen sind äquivalent:

1. $\mathcal{E}$ ist beschränkt.
2. Jede Gruppe aus $\mathcal{E}$ ist Zentrum-durch-endlich.
3. Jede Gruppe aus $\mathcal{E}$ lässt sich in ein direktes Produkt abzählbarer Gruppen einbetten.
4. $\mathcal{E}$ hat die Schranke $\aleph_1$.

Korollar. Eine Quasivarietät von Gruppen ist genau dann beschränkt, wenn sie abelsch ist.

G. HESSE: Jonsson-Gruppen und nicht-topologisierbare Gruppen

Aus der Shelah-Arbeit über Kurosh-Jonsson-Gruppen wurden folgende Sätze vorgetragen.

1. Theorem. Sei λ eine unendliche Kardinalzahl mit $\lambda^+ = 2^\lambda$. Dann existiert eine Gruppe G der Kardinalität λ^+ mit folgenden Eigenschaften..

a) Existiert $n_o \in \omega_1$, so dass für alle $S \subseteq G$ mit $|S| = \lambda^+$ und für alle $x \in G$, x ein Produkt von n_o-vielen Elementen aus S ist.

b) Außer den trivialen Topologien hat G keine Halbgruppen-Topologie.

2. Theorem. Ist $\lambda = \aleph_1$ oder $\lambda = \aleph_2$, so existiert eine Gruppe G der Kardinalität λ, die keine echt Unterhalbgruppe der Kardinalität λ hat.

Mit ähnlichen Methoden zeigt man:

3. Theorem. Ist $cf(\lambda) > \omega_1$, so existiert eine Gruppe G der Kardinalität λ, die nur die triviale T_2-Halbgruppentopologie besitzt.

W. HODGES: Nilpotent Groups

1. Recursive criteria are given for the solvability of finite systems of equations and inequations over nil-2 groups.

2. For all $k \geq 2$, there are continuum many elementary equivalence types of countable existentially closed nil-k groups.

3. For every $k \geq 2$, there is a nil-k group which is not elementarily embeddable in any pure injective nil-k group.

M. HUBER: The Group of Extensions and $V = L$

This talk is based on some joint work with H. Hiller and S. Shelah. We are studying questions which are related to the Whitehead Problem and which can likewise be settled in the constuctible universe L. Here I sketch the proof of the following

Theorem. ($V = L$). Let A be a torsion-free abelian group which is not free. Then $\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z})$ has elements of infinite order.

For the proof we use the description of Ext in terms of factor sets. We choose a non-free subgroup B of minimal cardinality κ and represent it as the union of a smooth chain of pure subgroups $\{B_\alpha | \alpha < \kappa\}$, $|B_\alpha| < \kappa$. Then we construct a compatible sequence of factor sets (f_α), f_α on B_α to $\mathbb{Z}$, whose limit represents an element of infinite order of $\mathrm{Ext}(B,\mathbb{Z})$. Here we make use of the combinatorial property $\diamondsuit$ of L and of a deep result of Shelah's concerning groups of singular cardinality.

V. HUBER-DYSON: An Elementary Theory for Free Products of Groups

Π is an axiomatic first order theory with operations 1, τ and $\cdot$, of ranks 0, 1 and 2 respectively. It is a subtheory of the theory Γ of groups with identity element, inversion and multiplication as well as a conservative enrichment of its $(1,\cdot)$-reduct $R\Gamma$. The free products of $R\Gamma$-models with $\tau(w)$ interpreted by the inverse of the terminal syllable of w form a reflective subcategory of the category of Π-models. The union of the free factors is elementarily definable and the universality of the free product becomes apparant in this first order formulation based on the combinatorial key term τ.

Let $\mathfrak{M}$ be a model of Π, call $\mathrm{Im}\,\tau = C\mathfrak{M}$ its core and $x\cdot\tau(x) = \delta(x)$ the predecessor of x. The axioms state that $\delta\tau$ is the constant function $\underline{1}$, $C\mathfrak{M}$ is closed under squaring, right multiplication by a core element yields the predecessor, a successor or a successor of the predecessor, every definable hereditary property of 1 is universal and multiplication is 'inductively definable'. They imply that the $(1,\cdot)$-reduct $R\mathfrak{M}$ is a group and $RC\mathfrak{M}$ a union of subgroups which generate in $R\mathfrak{M}$ their free product $R\mathfrak{M}^*$. $\mathfrak{M}^*$ is a Π-model and the nature of the embedding $\mathfrak{M}^* \hookrightarrow \mathfrak{M}$ is our most urgent concern. Under what circumstances will it be elementary? Π can be extended by specifying the elementary type of $C\mathfrak{M}$. Whenever the resulting theory is complete, its $(1,\cdot)$-reduct will be the comple theory of the pertinent free product. We are presently investigating the case of two finite factors.

O. H. KEGEL: Algebraischer Abschluß in der Klasse der lokal endlichen Gruppen

Es wird (elementar) gezeigt, daß die Gruppen, die in der Klasse der lokal endlichen Gruppen existentiell abgeschlossen sind, genau P. Hall's universell-lokal-endlichen Gruppen sind, d.h., die lokal-endlichen Gruppen, in denen jede endliche Gruppe vorkommt und in denen sich jeder Isomorphismus zwischen endlichen Untergruppen durch einen inneren Automorphismus realisieren läßt. Auf diese Weise erhält man automatisch die

Existenz beliebig großer universell-endlicher Gruppen.

Abzählbare universell-lokal-endliche Gruppen sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, enthalten aber zu sich selbst isomorphe echte Untergruppen. Auf dieser Weise, sieht man, daß sich jede existentiell vollständige lokal-endliche Gruppe der Kardinalität $\aleph_1$ durch eine ω_1-Folge $\{f_\alpha\ ;\ \alpha \in \omega_1\}$ von Einbettungen der abzählbaren Gruppe in sich beschreiben läßt. Nach Hickin wird beschrieben, wie sich die ω_1-Folgen $\{f_\alpha\ ;\ \alpha \in \omega_1\}$ so verschieden wählen lassen, daß sich $2^{\aleph_1}$ paarweis nicht-isomorphe universell-lokal-endliche Gruppen der Kardinalität $\aleph_1$ ergeben, so daß überabzählbare Untergruppen irgendeiner dieser Gruppen zu keiner überabzählbaren Untergruppe irgendeiner anderen dieser Gruppen isomorph ist.

B. KOPPELBERG: **Zusammenfassung liegt leider nicht vor**

S. KOPPELBERG: Zusammenfassung liegt leider nicht vor.

V. G. MOORE: <u>Characterizing R. E. Sets and Partial Recursive Functions in Groups</u>

Algebraic characterizations of a recursively enumerable set of elements of a finitely generated, recursively presented group and a partial recursive function from a finitely generated , recursively presented group to itself will be given. It will be shown that a finitely generated group has solvable word problem if and only if an analogy of the enumeration theorem of ordinary recursive function theory holds for the group.

W. PLESKEN: <u>Ein Sylowsatz für $GL(n,\mathbb{Z})$</u>

Minkowski hat bereits 1887 gezeigt, daß die Ordnung einer endlichen p-Untergruppe von $GL(n,\mathbb{Z})$ ein Teiler von $h_{n,p} = p^{\alpha_{n,p}}$ mit $\alpha_{n,p} = \left[\frac{n}{p+1}\right] + \left[\frac{n}{p(p-1)}\right] + \dots$ ist. Man kann leicht eine Untergruppe $H_{n,p}$ von $GL(n,\mathbb{Z})$ angeben, die die Ordnung $h_{n,p}$ hat und gelangt in Weiterführung der Minkowskischen Argumente zu folgendem Satz.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Satz. Sei $P \leqslant GL(n,\mathbb{Z})$ endliche p-Gruppe. Dann existiert ein $X \in GL(n,\mathbb{Q})$ mit $XPX^{-1} \leqslant H_{n,p}$.

Der Beweis benutzt im Fall $p \neq 2$ eine Ultraproduktkonstruktion und die Tatsache, daß $H_{n,p}$ mod q für unendlich viele Primzahlen q gerade p-Sylowgruppe von $GL(n,\mathbb{Z}_q)$ ist. Für $p = 2$ müssen noch zusätzlich quadratische Formen betrachtet werden, die von P bzw. $H_{n,p}$ festgelassen werden. Ein Beweis des obigen Satzes, der statt des Ultraproduktes ein darstellungstheoretisches Argument benutzt, wurde von H. Abold und mir erbracht (vgl. Math. Annalen 1978). Eine allgemeine Beschreibung der Sylowgruppen von GL(n,K) für beliebige Körper K hat R. T. Vol'vacev (Irw. Nauk. SSSR Ser. Mat. 27, 1031-1054, 1963) gegeben. Obiges Ergebnis, welches der skizzierte Beweis erheblich kürzer liefert, bestätigt für diesen Fall Vol'vacevs Resultate.

P. ROGERS: <u>Preservation of Saturation and Stability by the Nilpotent Free Product of Groups</u>

Partial answers are given of how much saturation or stability is preserved by the free product $*$ in the variety of all nilpotent of class 2 (nil-2) groups. First we consider the nil-2 free product of groups, one factor being finite. The elements of such a pruduct possess a unique normal form which we exploit, under certain conditions, to prove a 'Feferman-Vaught' theorem for $*$. As a consequence, we obtain a condition sufficient for $*$ to preserve both saturation and stability. It is also shown, in the case of saturation, that this condition is necessary. These results may be extended to products of bounded nil-2 groups, the key being a restricted distributive law for $*$ over the direct product.

E.-J. THIELE: Zusammenfassung liegt leider nicht vor.

HEINRICH WERNER (& STAN BURRIS): Linear Groups of Boolean Rings

A subdirect product $A \leqslant \prod_{i \in I} A_i$ of universal algebra (e.g. groups or rings) is called a Boolean product (with respect to a Boolean subalgebra B of $\mathbf{2}^I$) iff

1) for $a, b \in A$ the set $[a = b] := \{i \in I: a_i = b_i\}$ belongs to B and

2) for $X \in B$, $a, b \in A$ there is a $c \in A$ such that $X \subseteq [a = c]$ & $I \setminus X \subseteq [b = c]$.

Theorem If $R \leqslant \prod_{i \in I} R_i$ is a Boolean product of rings it induces Boolean products of groups $GL_n(R) \leqslant \prod_{i \in I} GL_n(R_i)$, $SL_n(R) \leqslant \prod_{i \in I} SL_n(R_i)$, $PSL_n(R) \leqslant \prod_{i \in I} PSL_n(R_i)$.

Corollary (Rosenstein-Gonshor) For each Boolean ring B, $GL_n(B) \cong GL_n(2)[B]^*$.

Corollary For each ring R with $R \models x^m = x$, $GL_n(R)$, $SL_n(R)$ and $PSL_n(R)$ have Boolean product representations with with factors from $GL_n(9)$, $SL_n(9)$ and $PSL_n(9)$ respectively, where 9 divides n.

As consequences one has decidable theories of classes of linear groups, information about $\aleph_0$-categoricity, algebraic or existential closedness, injectivity and equational compactness.

M. ZIEGLER: Zusammenfassung liegt leider nicht vor.

T. B. Flannagan (Berlin)