MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 4/78

Lineare Algebra und Geometrie in der gymnasialen Oberstufe

22.1. bis 28.1.1978

Leitung: A. Bergmann, Düsseldorf
H. Kunle, Karlsruhe

Die Lineare Algebra gehört gemäß den neuen Lehrplänen in nahezu allen Bundesländern zum obligatorischen Stoff der Mathematikkurse in der Sekundarstufe II. Die Auffassungen über die Lernziele und Inhalte solcher Kurse, insbesondere über die Stellung der Geometrie, gehen dabei allerdings weit auseinander.

Die Tagung sollte Gelegenheit zur gegenseitigen Information und Aussprache über diesen Problemkreis geben. Die Plenumsdiskussionen wurden vorwiegend durch die thematisch gruppierten Vorträge angeregt und gelenkt. Im Vordergrund standen immer wieder grundsätzliche Fragen (insbesondere in den Vorträgen von Profke, Seyfferth, Toussaint) und das Problem der Anwendungen der Linearen Algebra (Degen, Jaeger, Möller). Die gemeinsame Tendenz, die sich auch in der Schlußdiskussion deutlich abzeichnete, war eine Abkehr von einer zu stark betonten axiomatisch-deduktiven Darstellung der Linearen Algebra und eine stärkere Betonung konkreter Probleme, wobei der Geometrie im Rahmen der Schulmathematik eine besondere Bedeutung zukommt.

Unter den für die Schule geeigneten Anwendungsmöglichkeiten außerhalb der Geometrie wurden vor allem Fragestellungen der Wirtschaftsalgebra genannt (Jaeger, Möller). Herr Degen wies darüber hinaus auf Probleme aus der Analysis (vorwiegend aus dem Bereich der Polynomapproximation) hin, die mit den Methoden der Linearen Algebra gelöst werden können. In den restlichen Vorträgen wurden einerseits spezielle fachliche und fachdidaktische Fragen angeschnitten, andererseits (Reichel) ein Überblick über eine didaktische Vorlesung zur Linearen Algebra gegeben.

Am Donnerstagnachmittag wurden Filme (Unterrichtsmitschauen) gezeigt, die anläßlich einer fachdidaktischen Veranstaltung in Karlsruhe aufgenommen wurden. Es handelte sich um Ausschnitte aus einzelnen Unterrichtsstunden über Lineare Algebra, die in verschiedenen Klassen von verschiedenen Lehrern gemäß den in Baden-Württemberg gültigen Lehrplänen gehalten wurden. Im Rahmen der Schlußsitzung am Freitag gab Herr Winkelmann einen Überblick über die Situation in den verschiedenen Bundesländern.

Teilnehmer

H.-J. Arnold, Duisburg
W. Böddeker, Recklinghausen
N. Christmann, Kaiserslautern
W. Degen, Stuttgart
V. Drumm, Karlsruhe
H. Eggs, Freiburg
E. Fischer, Duisburg
R. Fritsch, Konstanz
S. Grosser, Wien
A. Jaeger, Bochum
B. Kind, Bochum
P. Kleinschmidt, Bochum
A. Koch, Berlin
H. Möller, Münster
H. Prade, Freiburg
L. Profke, Gießen
F. Raith, Freiburg
H.-Chr. Reichel, Wien
J. Schönbeck, Heidelberg
S. Seyfferth, Kassel
G. Törner, Darmstadt
M. Toussaint, Karlsruhe
R. Tranzier, Heidelberg
U. Viet, Osnabrück
R. Wagner, Würzburg
H. Wellstein, Kassel
B. Winkelmann, Bielefeld
H. Winter, Neuss

Vortragsauszüge

PROFKE, L.: Welche Lineare Algebra in der Sekundarstufe II?

Zur Behandlung von Problemen aus der linearen Wirtschaftsalgebra, der Physik, der Geometrie kommt man in der Schule aus mit einer vektoriellen Behandlung (Zusammenfassung von n-tupeln zu neuen Rechengrößen, ihre komponentenweise Addition und Vervielfachung, die Äquivalenz von Vektor- und Komponentengleichungen, eventuell Matrizenschreibweise), der Lösung linearer Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Algorithmus und einer "geometrischen Veranschaulichung" (Deutung von n-tupeln als Punkte oder Vektoren, natürliche Verallgemeinerung der analytischen Geometrie des Anschauungsraums auf den R^n).

Es ist zweifelhaft, ob sich die lineare Algebra zur Einführung in "strukturelles Denken" eignet:

- Beispiele werden nur so weit behandelt, bis sich die charakteristischen Vektorraumeigenschaften ergeben.
- Man erfindet künstliche Beispiele, um die Wichtigkeit der Begriffe zu demonstrieren.
- Entweder kommen die allgemeinen Begriffe in den Beispielen nicht zum Tragen, oder die Vektorraumtheorie erscheint für die Beispiele häufig unangemessen kompliziert.
- Zur Würdigung eines lückenlosen Aufbaus der Geometrie mit Hilfe der linearen Algebra muß die Geometrie zuvor unabhängig von der linearen Algebra präzisiert sein.

Demgegenüber sollte das räumliche Anschauungsvermögen anhand der analytischen Geometrie des Raumes ausgeformt werden. Der Raum und später der R^n dienen als Träger der mathematischen Modelle von Sachproblemen und zeigen so deren strukturelle Gemeinsamkeiten. Bei der Behandlung linearer Gleichungssysteme kann man auf wichtige Begriffe und Sätze der linearen Algebra zu sprechen kommen.

Vorschlag für einen Grundkurs:

- Von vektoriellen Größen zu Vektoren des (euklidischen) Raums
- Beschreibung linearer Gebilde im Raum
- Skalarprodukt im Raum
- lineare Gleichungssysteme
- lineare Räume (fakultativ)

SEYFFERTH, S.: <u>Vergleichende Anmerkungen zur Beziehungshaltigkeit der Linearen Algebra in Hochschule und gymnasialer Oberstufe</u>

Die Gegenüberstellung führt auf die - durch neue Lehrpläne und Lehrbücher bestätigte - Vermutung, daß ein Vorziehen von Teilen der Linearen Algebra in die Oberstufe nur um den Preis einer drastischen Verminderung der Beziehungshaltigkeit zu erreichen ist, mit der Konsequenz einer Änderung der Unterrichtsatmosphäre: weniger Entdecken und Farbigkeit, mehr Terminologie und scholastisches Abhandeln. Ausgehend von der These, daß auch für den Mathematikunterricht eine hohe Beziehungshaltigkeit zu fordern ist, wird ein entsprechender Aufbau der analytischen Geometrie vorgeschlagen, unter Einbeziehung der (gegen die bloß linearen Gebilde "farbig" kontrastierenden) Kegelschnitte, ferner mit Beziehungen zur Analysis und Physik. Für letzteres spricht u.a., daß die Physik nicht nur "Anwendungen" der Mathematik ermöglicht, sondern zu mathematischer Einsicht selbst Anlaß gibt.

TOUSSAINT, M.: <u>Lineare Algebra in der Oberstufe: Wenn ja, dann wie?</u>

Ein fundamentaler Irrtum der Schulmathematik ist die Meinung, daß man eine deduktive Theorie wie die Lineare Algebra auch deduktiv-axiomatisch unterrichten müsse. Die Methode der Hochschule wird hier unreflektiert auf die Schule übertragen. Wissenschaftspropädeutik als Lernziel der Kollegstufenkurse wird dabei gründlich mißverstanden. Es ist jedoch eine oft wiederholte Forderung, daß der Unterricht für den Erstlerner genetisch sein sollte. Die Entwicklungsgeschichte der Mathematik zeigt, daß die Bearbeitung und Lösung wesentlicher Probleme einer Theorie ihrer Axiomatisierung und deduktiven Darstellung vorausgeht.

An typischen Beispielen wird gezeigt, wie man den Schüler als Erstlerner dazu bringen kann, wesentliche Teile der Linearen Algebra selbst zu erschaffen, statt sie als Fertigprodukt zu konsumieren.

DEGEN, W.: <u>Einige Anwendungen der Linearen Algebra</u>

In dem Vortrag wurden einige Anwendungsbeispiele aus der numerischen Analysis vorgeführt, bei welchen einschlägige Begriffsbildungen und typische Schlußweisen der linearen Algebra an wesentlicher Stelle eingehen oder vorteilhaft verwendet werden können. Zugleich wurde darauf hingewiesen, daß die elektronischen

Taschenrechner auch dem gymnasialen Schulunterricht Möglichkeiten eröffnen, die Effizienz mathematischer Methoden an numerischen Beispielen sichtbar zu machen.

Im einzelnen wurden folgende Themen angesprochen:

Existenz- und Eindeutigkeitssatz der Polynominterpolation, lineare Differenzengleichungen und Bernoulli-Verfahren, Näherungslösung eines Randwertproblems mit Differenzenmethoden (Sinusfunktion), Vorstellung eines iterativen Verfahrens zur Berechnung natürlicher kubischer Spline-Funktionen und ein geometrischer Beweis des Alternantensatzes für die diskrete Tschebyscheff-Approximation.

JAEGER, A.: <u>Lineare Algebra in der höheren Schule aus der Sicht der Wirtschaftswissenschaft, wirtschaftliche Fragestellungen für Motivation und Anwendungen</u>

Die Lineare Algebra der Schule sollte auch die endliche gerichtete Graphen- und Netzwerktheorie umfassen, und die grundlegenden Isomorphismen zwischen zweistelligen Relationen (zwischen bzw. auf Mengen), (zweiteiligen bzw. einteiligen) Pfeildiagrammen und BOOLEschen Matrizen könnten frühzeitig und auch im Zusammenhang mit wirtschaftlichen Fragestellungen behandelt werden. Dies wird u.a. an den Beispielen des (qualitativen und später quantitativen) Teilebedarfs (GOZINTO-Diagramm) und dem LEONTIEFschen Modell gezeigt, die gleichzeitig ansprechende Beispiele für Motivation (Definition der Multiplikation graphentheoretisch motiviert) und Rechentechnik (z.B. NEUMANNsche Reihen und ihr Abbrechen im Falle von Dreiecksmatrizen) geben. Bei der ersten Behandlung von linearen Gleichungssystemen sollten (und zwar schon im Falle einer Variablen: $ax = b$) die Fallunterscheidungen: eindeutig, mehrdeutig lösbar behandelt werden. Auch bei wirtschaftlichen Beispielen zeigt sich die Wichtigkeit der frühen Einführung des Begriffs der linearen Abbildung.

MÖLLER, H.: <u>Anwendungsorientierte lineare Algebra und analytische Geometrie</u>

Unter Verwendung einer Vorlesungsausarbeitung von L. Führer (Geometrie für die gymnasiale Oberstufe; TU Berlin 1974) wird ein "Minimalkonzept" vorgestellt, das zunächst ein mathematisches Modell für den Anschauungsraum entwickelt und anschließend dessen Tragfähigkeit erweist. Durch die Berücksichtigung konvexer Polyeder ergibt sich dabei zugleich eine Möglichkeit, die für immer weitere Anwendungsbereiche wichtige lineare Optimierung in der Schule einführend zu behandeln.

DRUMM, V.: Eine einfache Kennzeichnung der euklidischen Vektorräume

Ausgehend von der Forderung nach einer sinnvollen Längenmessung in einem Vektorraum V, wird zunächst der Zusammenhang von Längenfunktionen und Eichmengen betrachtet. Mit Hilfe der gegebenen Längenfunktion und des "Satzes von Pythagoras" wird in V eine Orthogonalitätsrelation definiert. Durch die Forderung nach der Existenz eines "Lotes" zu jedem Vektor $\mathfrak{r} \neq \mathfrak{o}$ erreicht man, daß die Längenfunktion von einem Skalarprodukt induziert wird und die zugehörige Eichmenge eine Ellipse (Ellipsoid) ist.

FRITSCH, R.: Höher-dimensionale Elementargeometrie

Aus den linearen Operationen eines euklidischen Vektorraums V ergeben sich nach W. Bos die affinen Operationen:

$$V^3 \longrightarrow V,\ (x,p,y) \longmapsto x \underset{p}{+} y := x-p+y$$

$$\mathbb{R} \times V^2 \longrightarrow V,\ (\lambda,p,y) \longmapsto \lambda \underset{p}{\cdot} y = \lambda y+(1-\lambda)p$$

$$V^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,p,y) \longmapsto x \underset{p}{\cdot} y = (x-p)\cdot(y-p),$$

die einen bequemen Kalkül zur Behandlung elementargeometrischer Probleme liefern (Eine ausführliche Darstellung dieses Kalküls von W. Bos und G. Wolff erscheint voraussichtlich im Frühjahr 1978 in den Mitteilungen des Mathematischen Seminars der Universität Gießen).

Wie man damit Aussagen der ebenen Elementargeometrie in den Raum übertragen kann, läßt sich beispielshalber an der Dreiecksungleichung und am Höhenschnittpunkt demonstrieren (Möglichkeiten für Kantenlängen oder Flächeninhalte der Randdreiecke, verschiedene Verallgemeinerungen des Höhenbegriffs).

GROSSER, S.: Ein explizites Modell der projektiven Ebene

Ausgehend von der üblichen Darstellung des zweidimensionalen projektiven Raumes als des Raumes der Geraden durch den Ursprung im R^3 wird die Frage der Veranschaulichung der Kurven zweiter Ordnung in diesem Raum aufgeworfen. Durch Projektion auf die Einheitssphäre aus dem Ursprung, geeignete Identifikation und anschließende stereographische Projektion erhält man als Modell des P^2 einen berandeten Einheitskreis mit Identifikationen, in dem die projektiven Kegelschnitte als Kurven höchstens 4. Ordnung erscheinen. Die Rechnungen benützen teils Vektormethoden, teils elementare Fakten über komplexe Zahlen. Vorteile dieses Modells:

(1) Unendlich ferne Punkte werden "greifbar";

(2) Gegenüber der herkömmlichen Diskussion der Projektivität im Rahmen der linearen Algebra werden Anschauung und geometrische Motivation hervorgehoben;

(3) Gewisse Eigenschaften des Modells, wie z.B. Drehungsinvarianz, können durch komplexe Methoden leicht nachgewiesen werden.

ARNOLD, H.-J.: Über einen geometrisch-algebraischen Relationen-Kalkül zur Grundlegung, Vorbereitung und Einführung der Vektorrechnung

Ausgehend von Piagets Vermutung der Existenz von Strukturen, die auf verschiedenen Entwicklungsstufen immer wieder für Fortschritte des mathematischen Entwicklungsprozesses kennzeichnend sind, von Piaget als "Gruppierungen" bezeichnet, wird als Formprinzip für geometrische Axiomatiken vom Vortragenden eine bestimmte Klasse von Relativen (Relationenalgebren) vorgeschlagen. Es werden diesem Formprinzip entsprechende "Richtungsgruppierungen" angegeben, die für die im Hilbertschen Sinne angeordnete affine Geometrie kennzeichnend sind, aber zu anderen geometrischen Axiomen (als den Hilbertschen) führen. Diese Gruppierungen sind als Vorstufe der Vektorrechnung und zugleich als hinführende Vorbereitung zu nutzen. Der Kongruenzlehre entsprechende Abstandsgruppierungen, die in hinreichender Verträglichkeit mit den Richtungsgruppierungen stehen, ermöglichen den konstruktiven Aufbau des Vektorraumes aus der Geometrie, ohne daß auf dem Wege dahin auf das operative Moment der Algebra (hier wirksam als Relationenalgebra) verzichten zu müssen.

FISCHER, E.: <u>Das Rechnen mit Relationen als Grundlage für einen Einstieg in die axiomatische Geometrie auf der S II</u>

Es wurde über eine Unterrichtsreihe zur Einführung der Begriffe des Spernerschen Raumes und des affinen Raumes berichtet, die sich auf den Arnoldschen Gruppierungsbegriff (in einer zunächst abgeschwächten Form) stützt. Der Referent sah in der Aufnahme von Sperner-Räumen in den Gymnasialunterricht folgende Vorteile: a) Sie sind besonders einfach strukturiert, b) sie beschränken sich nicht auf Ebenen, c) sie erlauben, auf einer späteren Lernstufe durch Hinzunahme eines einzigen Axioms die affinen Geometrien zu gewinnen, d) sie beziehen mithin die Anschauungsebene und den Anschauungsraum mit ein. Die Arnoldsche relationentheoretische Axiomatik wurde aus folgenden Gründen verwendet: a) Sie benötigt die für die Schüler mit einer gewohnten Vorstellung verketteten geometrischen Grundbegriffe nicht; b) die den Schülern daher selbstverständlich erscheinenden affin-inzidenzgeometrischen Axiome werden zu Sätzen; c) Kenntnisse über Relationen und Gruppen lassen sich im Geometrieunterricht vorteilhaft verwenden; d) der Vektorraumbegriff kann auf einer späteren Lernstufe, auf den Gruppierungsbegriff aufbauend, erarbeitet werden.

KIND, B.: <u>Bericht über ein Seminar: "Geometrie im Schulunterricht mit Videoaufzeichnungen"</u>

Der Vortrag beschreibt die Konzeption, die Durchführung und erste Ergebnisse eines didaktischen Seminars für Studenten im Hauptstudium. In diesem Seminar setzen sich die Teilnehmer mit der Vermittlung von Mathematik (hier speziell Geometrie) nicht nur kognitiv auseinander, sondern üben sie im Rollenspiel, das mit einer Videoanlage zur späteren Besprechung festgehalten wird.

REICHEL, H.-Chr.: Zur Gestaltung einer Lehrveranstaltung über "Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie an der gymnasialen Oberstufe"

Es wird ein Vorschlag zur Gestaltung von didaktisch orientierten Lehrveranstaltungen mit dem im Titel genannten fachlichen Schwerpunkt vorgestellt und diskutiert (Vorlesung, Übung, Konversatorium; derartige LV sind nun ja in der Lehreraus- und -fortbildung durchwegs vorgesehen oder zumindest empfohlen). - Was ist der Sinn und das Ziel einer solchen Vorlesung? Welche Inhalte können (sollten) abgedeckt werden? Wann und in welchem Kontext soll eine derartige LV angeboten werden?

Im Laufe des Vortrages ergibt sich auch die Gelegenheit für Bemerkungen zu den konkreten Fragestellungen der Tagung: "Lineare Algebra an der Schule? Und wenn ja, dann wie?"

(1) Welche Lehrziele könnten (sollten) erreicht werden; welche didaktischen Prinzipien könnten an welchen Stellen zum Tragen kommen?
(2) Zum Vektorbegriff an der gymnasialen Oberstufe.
(3) Anwendungsorientiertheit (z.B. Lineare Optimierung: was, warum und wie?)
(4) Zum Verhältnis "Geometrie Lineare Algebra" (Vektorräume und/oder affine Räume? Welchen Zielen könnte eine explizite Behandlung des Begriffes "affiner Raum" dienen? Ergibt sich daraus bereits eine Methode für den Unterricht?
(5) Ist das Lehrziel "Strukturelles Denken Lernen" in der Linearen Algebra auch ohne Axiomatik erreichbar? Dazu ein Beispiel.
(6) Verschiedene Einstiege und Motivationen des Skalarproduktes ("Was ist eine gute Motivation?")
(7) Eine kurze Bemerkung zum Thema "Projektorientierter Unterricht und Lineare Algebra".

M. Toussaint (Karlsruhe)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft