MATHEMATHISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 5/1978

Wahrscheinlichkeitsmaße auf Gruppen

29.1. bis 4.2.1978

Die fünfte Tagung über Wahrscheinlichkeitsmaße auf Gruppen stand wieder unter der Leitung der Herren H. Heyer (Tübingen) und L. Schmetterer (Wien). Im Vordergrund standen vor allem Referate über neue Ergebnisse aus der Theorie der Irrfahrten auf Gruppen.

Teilnehmer

P. Baldi, Paris
Chr. Berg, Kopenhagen
M.S. Bingham, Hull
Ph. Bougerol, Paris
T. Byczkowski, Wrocław
P. Crépel, Rennes
E. Dettweiler, Tübingen
Th. Drisch, Dortmund
R.M. Dudley, Cambridge
L. Elie, Paris
B.-J. Falkowski, München
P.J. Fernandez, Rio de Janeiro
G. Forst, Kopenhagen
P. Gerl, Salzburg
W. Guth, Konstanz
W. Hazod, Dortmund
H. Hennion, Rennes
H. Heyer, Tübingen
F. Hirsch, Cachan
A. Janssen, Dortmund
E. Kaniuth, Paderborn
A. Mukherjea, Tampa
P. Plaumann, Erlangen
A. Raugi, Rennes
P. Ressel, Hamburg
H. Rindler, Wien
J.P. Roth, Mulhouse
B. Roynette, Nancy
E. Schlichting, München
K. Schmidt, Coventry
D.W. Stroock, Boulder
C. Sunyach, Paris
W. von Waldenfels, Heidelberg

Die Reihenfolge der Vortragsauszüge entspricht im wesentlichen der Reihenfolge der gehaltenen Vorträge.

Vortragsauszüge

H. Rindler: Random walks on compact groups.

Herr Rindler trug über eine gemeinsame Arbeit mit V. Losert vor. Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer kompakten Gruppe G. T: $G^{\mathbb{N}} \longrightarrow G^{\mathbb{N}}$ bezeichne den Verschiebungsoperator ($T(x_1,x_2,...) = (x_2,x_3,...)$). Ist T ergodisch auf $(G^{\mathbb{N}}, \mu^{\mathbb{N}})$, so heißt $\omega \in G^{\mathbb{N}}$ generisch bezüglich $\mu^{\mathbb{N}}$, wenn die Folge $(T^n(\omega))$ in $G^{\mathbb{N}}$ gleichverteilt ist. (Y_n) bezeichne die durch $Y_n(\omega) = x_1 x_2 ... x_n$ $(\omega = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}})$ definierte Irrfahrt auf G. Man erhält bei Gültigkeit der Kontinuumhypothese folgende Resultate für separable kompakte Gruppen :

1. Die Menge aller bzgl. $\mu^{\mathbb{N}}$ generischen Punkte besitzt äußeres Maß 1.
2. Der Träger von μ sei nicht in einer Nebenklasse einer nicht trivialen abgeschlossenen Untergruppe enthalten. Dann besitzt die Menge der $\omega \in G^{\mathbb{N}}$, für die die Folge $(Y_n(\omega))$ gleichverteilt ist, äußeres Maß 1.

Ist μ das Haarmaß auf G, so gelten die beiden Sätze ohne Kontinuumhypothese.

P. Gerl: Random walks on discrete and free groups.

Es seien G eine diskrete Gruppe und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf G. Untersucht wird das Grenzverhalten der Faltungspotenzen P^n $(n \in \mathbb{N})$ von P.

1. Ist G eine unendliche Gruppe und ist P irreduzibel, d.h.

für alle $g \in G$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $P^n(g) > o$, so gilt:

Für $\sigma := \limsup_{n \to \infty} (P^n(e))^{1/n}$ ist $o < \sigma \leq 1$ und

$\lim_{n \to \infty} \sigma^{-n} P^n(g) = o$ für alle $g \in G$, d.h. $\sigma^{-n}P^n$ konvergiert vag gegen o.

2. Es sei $G = F_2 = \langle a,b \rangle$ die freie Gruppe mit den zwei Erzeugenden a und b. Ist das W-Maß P auf $\{a,b,a^{-1},b^{-1}\}$ konzentriert und gilt $P(a)P(a^{-1}) \leq P(b)P(b^{-1})$, so gewinnt man die folgenden asymptotischen Aussagen:

a) Ist $w \in F_2$ von gerader reduzierter Länge, so ist $P^{2n+1}(w) = o$ und $P^{2n}(w) = h(w)(n^{3/2}x_o^{\,n})^{-1} + O(n^{-2}x_o^{-n})$,

b) ist $w \in F_2$ von ungerader reduzierter Länge, so ist $P^{2n}(w) = o$ und $P^{2n+1}(w) = h(w)(n^{3/2}x_o^{\,n})^{-1} + O(n^{-2}x_o^{-n})$,

wobei $x_o = \lim_{n \to \infty} (P^{2n}(e))^{-1/n}$ ist, und die Funktion h explizit angegeben werden kann.

<u>A. Janssen</u>: Der Lebesguesche Zerlegungssatz für Kerne.

Es sei X ein topologischer Raum. M(X) bezeichne die Menge der endlichen Borelmaße. $\mathfrak{B}(M(X))$ sei die Borelsche σ-Algebra bzgl. der schwachen Topologie auf M(X). Ferner bezeichne $\mathfrak{B}(X)^*$ die gröbste σ-Algebra auf M(X), so daß für alle $A \in \mathfrak{B}(X)$ die Abbildung $\mu \longrightarrow \mu(A)$ meßbar ist. Es gilt der folgende

Satz: Ist ρ ein reguläres Maß, und ist $\mu = \mu_1 + \mu_2$ die Lebesguesche Zerlegung eines Maßes $\mu \in M(X)$ bzgl. ρ mit $\mu_1 \ll \rho$, $\mu_2 \perp \rho$, so gilt:

a) Die durch $\mu \longrightarrow \mu_i$ (i=1,2) definierten Abbildungen von M(X) in sich sind $(\mathfrak{B}(M(X)), \mathfrak{B}(X)^*)$-meßbar.

b) $\mathfrak{B}(M(X))$-meßbare Kerne lassen sich im Sinne der

Lebesgueschen Zerlegung bzgl. ϱ in Kerne zerlegen. Aus diesem Satz gewinnt man, daß $\{\mu \in M(X) : \mu \ll \varrho\}$ eine $F_{\sigma\delta}$-Menge und $\{\mu \in M(X) : \mu \perp \varrho\}$ eine G_δ-Menge ist.
Ist X eine topologische Halbgruppe, und ist μ ein reguläres und τ-glattes Maß auf X, so erhält man als Spezialfall, daß $\{x \in X : \mu * \varepsilon_x \ll \mu\}$ eine $F_{\sigma\delta}$-Menge und $\{x \in X : \mu * \varepsilon_x \perp \mu\}$ eine G_δ-Menge ist.

<u>K. Schmidt</u>: Measures on groups associated with a problem in ergodic theory.

Es sei T eine nicht singuläre Transformation eines Lebesgue Raumes, und es sei A eine lokalkompakte abelsche Gruppe. Thema des Vortrags war das folgende Problem: Wann ist eine meßbare Funktion $f : X \longrightarrow A$ von der Form $f = g \circ T - g$, wobei $g : X \longrightarrow A$ wiederum meßbar ist ? Dieses Problem taucht sowohl in der Theorie der Gleichverteilung als auch bei gewissen Zentralen Grenzwertsätzen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf.

Die erste Möglichkeit, Funktionen f von der Form $g \circ T - g$ zu charakterisieren, besteht in einer Beschränktheitsbedingung:

Satz 1: Es sei μ ein unter T invariantes W-Maß auf X. Für jede Borelfunktion $f : X \longrightarrow A$ sei $a_f(n,x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$. τ_n^f bezeichne die Verteilung der Funktion $a_f(n,.)$. Dann gilt: f ist genau dann von der Form $g \circ T - g$, wenn die Folge (τ_n^f) gleichmäßig straff ist.

Die zweite Möglichkeit ergibt sich aus einem Satz von Hannachi-Oka-Osikawa. Für jede Borelfunktion $f : X \longrightarrow A$

definiert man

$B_f = \{\chi \in \hat{A} : \chi(f(x)) = g_\chi(Tx)\overline{g_\chi(x)}$ für eine Borelfunktion $g_\chi : X \to \mathbb{T}\}$;

ferner sei für jedes W-Maß σ auf $\hat{A}$

$$E_\sigma = \{\chi \in \hat{A} : \inf_n \sup_{\{a : \int |a(\chi)-1|\, d\sigma(\chi) < 1/n\}} |a(\chi) - 1| = 0 \}.$$

Dann sind sowohl B_f als auch E_σ Boreluntergruppen von $\hat{A}$, und es gilt:

Satz 2: Es sei $f : X \longrightarrow A$ eine Borelfunktion. Ist σ ein W-Maß auf $\hat{A}$ mit $\sigma(B_f) = 1$, so ist $E_\sigma \subset B_f$.

Dieser Satz ist in einem gewissen Sinne der best mögliche. Der Vortrag endete mit einer kurzen Beschreibung der Zuordnung $\sigma \longrightarrow E_\sigma$. Insbesondere gilt: Es ist genau dann $E_\sigma = \hat{A}$, wenn σ auf keiner echten abgeschlossenen Untergruppe konzentriert ist und $\limsup_{a \to \infty} |\hat{\sigma}(a)| < 1$ ist.

Literatur: C.C. Moore und K.Schmidt: A characterization of coboundaries and homomorphisms, and a problem of H. Helson (Preprint).

<u>D. Stroock</u>: Generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and a limit theorem for branching Brownian motion.

Consider an infinite family of independent branching Brownian motions in $\mathbb{R}^d$ which are initially distributed according to a Poisson random field. Let $\eta_t(\Gamma)$, $t \geq 0$ and $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, denote the number of particles in Γ at time t; and for $\alpha > 0$ define

$$\eta_t^{(\alpha)}(\Gamma) = \frac{\eta_t(\alpha\Gamma) - \alpha^d|\Gamma|}{\alpha^{(d+2)/2}} \quad (|\Gamma| = \text{Lebesgue meas. of } \Gamma).$$

It is shown that, when $d \geq 3$, as $\alpha \to \infty$ the process $\eta_\cdot^{(\alpha)}$ tends

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(weakly) in $D([0,\infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ to the generalized Ornstein-Uhlenbeck process in $C([0,\infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ determined by the equation

$$N_t = W_t + \int_0^t 1/2\Delta N_s \, ds$$

where W_t is the "Siegel" process on $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (i.e. W_t is the Gaussian process with covariance $E\left[W_s(\varphi)W_t(\psi)\right] = t\wedge s(\varphi,\psi)$ with $(\varphi,\psi) = \int \varphi(x)\psi(x)\,dx$). Also, a complete characterization of the invariant measures for this process is given. Finally, it is shown that there is a Banach subspace X of $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ such that X can be taken to be the state space of $N_\cdot$ and $N_\cdot$ is ergodic on X with invariant measure having characteristic function $\exp\left[-1/2\langle\varphi, \Delta^{-1}\varphi\rangle\right]$.

This work appears in a paper by R. Holley and D. Stroock. The paper will be published in the Japanese J. of Math.

Chr. Berg: On Hunt convolution kernels which are continuous singular with respect to Haar measure.

Es sei G eine nicht diskrete lokalkompakte abelsche Gruppe mit abzählbarer Basis. $(\mu_t)_{t>0}$ sei eine symmetrische Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf G mit $\mathrm{supp}(\mu_t) = G$ für alle $t>0$. Ferner sei $\rho = \int_0^\infty e^{-t}\mu_t\,dt$. Ist ρ stetig singulär bzgl. des Haarmaßes, so ist auch μ_t stetig singulär für alle $t>0$. Es ist nicht bekannt, ob die Umkehrung auch allgemein richtig ist. Für zwei Spezialfälle wird die Umkehrung bewiesen:

1. $G = \mathbb{R}$ und (μ_t) ist die Faltungshalbgruppe mit der Fouriertransformierten $\hat{\mu}_t(x) = e^{-t\psi(x)}$, wobei

$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos(x/n!))$ ist. Wegen $\lim_{n\to\infty} \psi(2\pi\, n!) = o$ sind dann alle μ_t und auch ϱ stetig singulär.

2. $G = T^{\infty}$. $g_t(\theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2}\cos(n\theta)$ ist der Gauß Kern auf T. Für eine Folge $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \dots)$ von positiven Zahlen definiert $\mu_t^{\mathfrak{a}} = \bigotimes_{k=1}^{\infty} g_{ta_k}$ $(t>o)$ eine Gaußhalbgruppe auf T^{∞}. Genau dann ist $\mu_t^{\mathfrak{a}}$ stetig singulär, wenn gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2ta_k} = \infty$. Ist $\sup_k a_k < \infty$, so ist ϱ stets stetig singulär.

<u>G. Forst</u>: Potential kernels on the half line and infinitely divisible measures.

Ist μ $(\neq \varepsilon_o)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}_+$, so heißt $G = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n$ das zu μ gehörige Erneuerungsmaß. Nach einem Resultat von D.J. Daley (1965) gilt für Erneuerungsmaße G, daß genau dann für alle $\alpha > o$ auch αG ein Erneuerungsmaß ist, wenn für die Laplacetransformierte LG von G gilt:

$$(LG(s))^{-1} = bs + \int_{\mathbb{R}_+} (1 - e^{-xs})\, d\lambda(x) \quad (\text{für alle } s>o),$$

wobei $b \geq o$ und λ ein Maß auf $]o, \infty[$ ist mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}_+} (1+x)^{-1} x \, d\lambda(x) < \infty \; .$$

Im Rahmen der Untersuchung von Potentialkernen auf $\mathbb{R}_+$ ergibt sich dieser Satz von Daley als leichte Folgerung aus der Integraldarstellung von Subordinationsexponenten. Weiter zeigt sich, daß die Bedingungen, unter denen Maße auf $\mathbb{R}_+$ Potentialkerne sind, mit ähnlichen Bedingungen zusammenhängen, die die unendliche Teilbarkeit von W-Maßen auf $\mathbb{R}_+$ implizieren (vollständige Monotonie, logarithmische Konvexität, etc.).

B.-J. Falkowski: Infinitely divisible positive functions on $SO(3) \circledS \mathbb{R}^3$.

Mit Hilfe eines Satzes von K.R. Parthasarathy und K. Schmidt lassen sich die unendlich teilbaren positiv definiten Funktionen auf $SO(3) \circledS \mathbb{R}^3$ berechnen. Dazu werden mit Hilfe der Theorie der induzierten Darstellungen die irreduziblen unitären Darstellungen des semidirekten Produkts und ihre zugehörigen Kozyklen erster Ordnung bestimmt. Als Resultat erhält man:

Alle unendlich teilbaren positiv definiten Funktionen auf $SO(3) \circledS \mathbb{R}^3$, die von zu irreduziblen Darstellungen gehörenden Kozyklen stammen, sind gegeben durch:

a) $f(x,y) = \exp(\langle U_{(x,y)}v - v, v\rangle)$

($(x,y) \in SO(3) \circledS \mathbb{R}^3$, $U_{(x,y)}$: unitäre Darstellung in den Hilbertraum H, $v \in H$),

b) $f(x,y) = \exp(-b^2\langle y,y\rangle)$ ($b \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in SO(3) \circledS \mathbb{R}^3$).

F. Hirsch: Existence d'une résolvante sous-markovienne associée à un noyau.

Es seien $(E, \mathcal{E})$ ein meßbarer Raum und $\mathcal{F}$ die Menge der reellwertigen meßbaren Funktionen. Ein Kern $V: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ heißt eigentlich, wenn es eine aufsteigende Folge (A_n) in $\mathcal{E}$ gibt mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = E$, so daß $V1_{A_n} \in \mathcal{F}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Das Referat behandelte das Problem, unter welchen

Bedingungen zu einem gegebenen eigentlichen Kern V eine submarkoffsche Resolvente $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ existiert mit $V = \lim_{\lambda\downarrow 0} R_\lambda$. Eine notwendige Bedingung ist stets das sog. vollständige Maximumprinzip von Cartan und Deny. Für den Fall, daß E eine lokalkompakte abelsche Gruppe mit abzählbarer Basis und V translationsinvariant ist, lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen angeben:

Genau dann existiert zu gegebenem V eine submarkoffsche Resolvente (R_λ), wenn V das vollständige Maximumprinzip erfüllt und zusätzlich gilt:

a) für alle $y \in E$ ist $\lim_{x\to\infty} (\varepsilon_y * \varepsilon_x * V - \varepsilon_x * V) = 0$ und

b) für alle positiven Funktionen f auf E mit kompaktem Träger gilt: $\inf_{x\in E} Vf(x) = 0$.

Ist E nicht notwendig abelsch, aber unimodular, so gilt ebenfalls der obige Satz, falls V nicht singulär ist bzgl. des Haarmaßes. Im Falle $E = \mathbb{R}$ lassen sich darüber hinaus explizite analytische Bedingungen für einen Kern V mit Dichte angeben, unter denen V ein Huntscher Kern ist.

L. Elie: Etude du renouvellement sur les goupes localement compact à base dénombrable G tels que G/G_0 soit compact.

Es sei G eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf G mit den Eigenschaften:

a) $\overline{\langle \mathrm{supp}(\mu)\rangle} = G$,

b) es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß μ^n nicht singulär ist,

c) $U = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$ ist ein Radonmaß auf G.

Die folgenden beiden Probleme wurden behandelt:

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

1. Was ist die die Menge I_μ der vagen Adhärenzpunkte von $\{\varepsilon_g * U : g \in G\}$ für $g \to \infty$? Ist $\mathrm{card}(I_\mu) = 1$, so heißt μ vom Typ I, andernfalls vom Typ II. G heißt vom Typ I bzw. vom Typ II, falls jedes W-Maß μ mit den Eigenschaften a),b),c),vom Typ I bzw. vom Typ II ist.

2. Ist die Menge $P_\mu = \{\varepsilon_g * U * \varepsilon_{g'} : (g,g') \in G \times G\}$ vag relativ kompakt? Ist für alle W-Maße μ auf G mit den Eigenschaften a),b),c) die Menge P_μ relativ kompakt, so sagt man, daß G die Eigenschaft (P) besitzt.

In der Klasse G der lokalkompakten Gruppen mit kompaktem Quotienten G/G_o lassen sich explizit diejenigen Gruppen angeben, die vom Typ I sind bzw. die die Eigenschaft (P) besitzen.

P. Crépel: Grenzwertsätze für abhängige Zufallsvariable und Irrfahrten auf Gruppen.

Es sei G eine lokalkompakte Gruppe und $Z_n = \xi_1 \cdots \xi_n$ eine rechtsseitige Irrfahrt auf G mit Verteilung μ, so daß μ adaptiert ist, d.h. $\overline{\langle \mathrm{supp}(\mu) \rangle} = G$ gilt.

Man interessiert sich für das folgende Problem: Wie lassen sich die Z_n in geeigneter Weise normieren, so daß die normierte Folge gegen ein nicht ausgeartetes W-Maß konvergiert? Genauer: Man suche eine Folge von Funktionen $\varphi_n : G \longrightarrow G$ (oder auch mit Werten in einem anderen Raum), so daß $\varphi_n(Z_n)$ gegen ein nicht ausgeartetes W-Maß konvergiert.

Die Fälle, daß G kompakt oder $G = \mathbb{R}^d$ ist, sind wohlbekannt. Ist G eine beliebige nicht abelsche Gruppe, so gibt es eine Vielzahl völlig verschiedenartiger Resultate. Der Vortrag gab einen Überblick über derartige Resultate und vor allem über die verwendeten Beweismethoden für diese Sätze vom Typ des zentralen Grenzwertsatzes (Fouriertransformation, Momentenmethode, Theorem von Trotter, Theorem von Skorohod, Verwendung bekannter klassischer Sätze für abhängige Zufallsveränderliche etc.). Diese Methoden wurden an zwei Beispielen erläutert, nämlich der Gruppe $SO(d) \circledS \mathbb{R}^d$ und der Heisenberggruppe.

A. Raugi: Théorèmes de la limite centrale sur les groupes nilpotents simplement connexes.

Es sei $(N, [\,,\,])$ eine nilpotente Liealgebra der Länge r. N werde mit dem durch die Campbell-Hausdorff-Formel gegebenen Produkt $\circ$ versehen ($u \circ v = u + v + \frac{1}{2}[u,v] + \dots$); $(N, \circ)$ ist dann eine einfach zusammenhängende Liegruppe. Es sei nun μ ein W-Maß auf N. μ besitze ein Moment der Ordnung 1. Bezeichnet π die kanonische Quotientenabbildung $\pi : N \longrightarrow N/N^2$, so setzt man

$$e(\mu) = \int_N \pi(u)\, d\mu(u) \in N/[N,N] .$$

Mit $N^1 = N$, $N^2 = [N,N]$, ..., $N^r = [N,N^{r-1}]$, $N^{r+1} = \{o\}$ sei die absteigende Zentralreihe von N bezeichnet. Es sei ferner $I^{1,o}(\mu) = N$, $I^{1,1}(\mu) = \pi^{-1}(e(\mu))$, und für $(l,k) \in \mathbb{N}^2$ mit $o \leq k < l$, $l \geq 2$ sei $I^{l,k}(\mu)$ das Ideal von N^l, welches von denjenigen Elementen gebildet wird, die von der Form $[u_1, [u_2 \dots [u_{l-1}, u_l] \dots]$ $(u_1, \dots, u_l \in N)$

sind, wobei mindestens k Elemente unter den u_i $(i=1,\dots,l)$ zu $\pi^{-1}(e(\mu))$ gehören. $(I^{l,k}(\mu))$ heißt die zu μ gehörige Idealfolge.

Es sei $E = \{(l,k) \in \mathbb{N}^2 : o \leq k < l\} \cup \{(1,1)\}$ und $m^{l,k}$ bezeichne für alle $(l,k) \in E$ ein Komplement von $I^{l_o,k_o}(\mu)$ in $I^{l,k}(\mu)$, wenn $(l_o,k_o) = (l,k-1)$ für $k \geq 1$ und $(l_o,k_o) = (l-1,l-2)$ für $k=o$ ist.

Es ist $N = \bigoplus_{\{(l,k) \in E\}} m^{l,k}$. Für alle $u \in N$ bezeichne $u^{l,k}$ die Komponente von u in $m^{l,k}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei schließlich

$$U_n(u) = \frac{u^{1,o} + u^{1,1}}{n^{1/2}} + \sum_{(l,k) \in E} \frac{u^{l,k}}{n^{(l+k)/2}} \quad \text{und}$$

$$\bar{x} = \int_N u^{1,1} \, d\mu(u) .$$

Dann gilt der folgende Satz:

Es sei μ ein adaptiertes W-Maß auf N, welches ein Moment zweiter Ordnung besitzt. Dann konvergiert die Folge $(U_n(\mu^n * \varepsilon_{-n\bar{x}}))$ vag gegen ein W-Maß ν, das absolut stetig bzgl. des Haarmaßes auf N ist. Darüber hinaus ist ν die Verteilung zum Zeitpunkt 1 eines Diffusionsprozesses auf N ($= \mathbb{R}^d$, d = dim N), und ν hängt nur von den Momenten zweiter Ordnung von μ ab.

<u>P. Ressel</u>: A continuity theorem for weakly stationary processes on an arbitrary locally compact Abelian group.

Es sei G eine beliebige lokalkompakte abelsche Gruppe. $\hat{G}$ bezeichne die duale Gruppe. Ein schwach stationärer Prozeß ist eine stetige Abbildung $X:\hat{G} \longrightarrow H$ (H Hilbertraum), so daß $\langle X(y_1), X(y_2) \rangle$ $(y_1, y_2 \in \hat{G})$ nur von $y_1 - y_2$ abhängt.

Diese Prozesse sind genau die Fouriertransformierten der vektorwertigen Maße aus caos(G,H). Dabei ist M genau dann aus caos(G,H), wenn $M: \mathcal{B}(G) \longrightarrow H$ σ-additiv ist, wenn für alle $A,B \in \mathcal{B}(G)$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt: $M(A) \perp M(B)$, und wenn das endliche Borelmaß $m(.) = \|M(.)\|^2$ ein Radonmaß ist. Die schwache Topologie auf caos(G,H) ist per Definition von den Abbildungen $M \longrightarrow \int f\, dM$ $(f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(G))$ induziert. Für alle $M \in$ caos(G,H) bezeichne $X_M : \hat{G} \longrightarrow H$, definiert durch $X_M(y) = \int_G y(x)\, dM(x)$ $(y \in \hat{G})$, die Fouriertransformierte von M. Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $H^{\hat{G}}$ induziert eine Hausdorffsche Topologie auf caos(G,H), die offensichtlich schwächer ist als die schwache Topologie. Andererseits gilt der Satz:

$\mathcal{K} \subset$ caos(G,H) ist genau dann kompakt in der obigen "Fourier"-Topologie, wenn $\mathcal{K}$ bzgl. der schwachen Topologie kompakt ist.

Hieraus gewinnt man als Korollar:

Es sei (X_n) eine Folge schwach stationärer Prozesse auf G, und es sei etwa $X_n = X_{M_n}$ mit $M_n \in$ caos(G,H). Existiert für alle $y \in \hat{G}$ der Grenzwert $X_o(y) = \lim_{n \to \infty} X_n(y)$ und ist X_o stetig im Nullpunkt, so ist X_o ebenfalls schwach stationär. Ist $X_o = X_{M_o}$, so gilt $M_n \longrightarrow M_o$ in der schwachen Topologie.

Ähnliche Resultate lassen sich für die Gruppen der Verschiebungen, die zu schwach stationären Prozessen gehören, und ihre entsprechenden Spektralmaße beweisen.

<u>P.Baldi</u>: Lois stables sur le groupe des déplacements.

Es wird das folgende Problem behandelt: Welche Wahrscheinlichkeitsmaße auf $G_d := SO(d) \circledS \mathbb{R}^d$ können als vager Grenzwert einer Folge von W-Maßen von der Form $A_n \nu^n$ auftreten, wo alle A_n Automorphismen von $\mathbb{G}_d$ sind? Es lassen sich die folgenden beiden Resultate zeigen:

1. Konvergiert $(A_n \nu^n)$ vag gegen μ, und ist μ adaptiert, so ist μ stabil, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert ein Automorphismus B_m auf G_d, so daß $B_m \mu^m = \mu$ ist.

2. Ist μ adaptiert und stabil, so besitzt μ die folgende Gestalt: $\mu = \lambda_\alpha \otimes \sigma$ $(0 < \alpha \leq 2)$.

Dabei bezeichnet σ das normierte Haarmaß auf SO(d) und λ_α das rotationsinvariante stabile W-Maß auf $\mathbb{R}^d$, dessen Fouriertransformierte von der Gestalt $\hat{\lambda}_\alpha(t) = \exp(-c|t|^\alpha)$ $(c > 0)$ ist.

H. Hennion: Marches aléatoires sur les espaces homogènes.

Es seien G eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis und H eine abgeschlossene Untergruppe. Ist μ ein adaptiertes W-Maß auf G, so nennt man die Markoffkette mit dem Übergangskern P - definiert durch $Pf(x) = \int f(gx)\,d\mu(g)$ $(x \in M = G/H)$ - die Irrfahrt auf M = G/H mit der Verteilung μ. Ist μ breit, d.h. existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß μ^n nicht singulär ist, und existiert auf M ein σ-endliches relativ invariantes Maß m mit Faktor χ_m, für das $\int \chi_m(g^{-1})\,d\mu(g) = 1$ erfüllt ist, so gilt:

a) entweder ist für jede kompakte Teilmenge $K \subset M$ $\sum_{n \geq 0} P^n 1_K$ beschränkt, oder

b) P ist m-rekurrent im Sinne von Harris.

Darüber hinaus hat man: Ist $\int \chi_m(g^{-1})\,d\mu(g) < 1$ oder gilt die schwächere Bedingung $\int \log \chi_m(g^{-1})\,d\mu(g) < 0$, so ist ebenfalls a) erfüllt.

Gegen Ende des Referates wurde über Resultate verschie-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

dener Autoren über die Klassifikation homogener Räume berichtet.

Ph. Bougerol: Une propriété des fonctions de concentration sur un groupe localement compact à base denombrable.

Es sei G eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis. Ein adaptiertes W-Maß μ auf G heißt aperiodisch, wenn kein Element $g \in G$ existiert, so daß $\mathrm{supp}(\mu) \subset gH$ für eine nicht triviale abgeschlossene Untergruppe H von G ist. Es gilt der Satz:

Ist G zusammenhängend und ist μ breit, so existiert für alle kompakten Teilmengen $K \subset G$ ein $c > o$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sup_{x,y \in G} \mu^n(xKy) \leq c\, n^{-1/2} .$$

Dieser Satz ist auch gültig für nicht mittelbare Gruppen und Gruppen, die kompakte Erweiterungen auflösbarer Gruppen sind.

Anschließend wurden die zusammenhängenden Gruppen untersucht, die ein W-Maß μ besitzen, so daß für alle $K \subset G$ (K kompakt) und geeignete $c > o$

$$\sup_{x,y \in G} \mu^n(xK_y) \sim c\, n^{-1/2} \quad \text{gilt.}$$

An Beispielen bzw. Gegenbeispielen wurde schließlich die Notwendigkeit der Hypothesen demonstriert.

Th. Drisch: Convolution of conditionally positive functionals.

Ein Funktional A auf einem Funktionenraum E heißt bedingt positiv, wenn für alle $f \in E$ mit $f \geq o$ und $f(o)=o$ gilt $\langle A,f \rangle \geq o$. Die bedingt positiven Funktionale, die im maßtheoretischen Sinn straff sind, sind die infinitesimalen Funktionale vag stetiger Faltungshalbgruppen (μ_t) positiver beschränkter Maße, wobei dann A definiert ist durch

$\langle A,f\rangle = \lim\limits_{t\downarrow o} t^{-1}\langle \mu_t - \varepsilon_o, f\rangle$ für alle $f \in E$, die im Nullpunkt zweimal differenzierbar sind. Es ist bekannt, daß in der beschriebenen Situation $\hat{\mu}_t = e^{t\hat{A}}$ gilt für alle t.

Betrachtet man nun A als integrierbare Distribution der Ordnung 2, so lassen sich die Partialsummen $\sum\limits_{n=o}^{k} \frac{t^n}{n!} A^{*n}$ definieren, und diese Partialsummen konvergieren schwach für alle $f \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ ist der Raum der C^{∞}-Funktionen mit kompaktem Träger). Für alle $t > o$ ist der mit e^{tA} bezeichnete Grenzwert ein positives beschränktes Maß. Es gelten die folgenden Beziehungen: Es ist $\mu_t = e^{tA}$, log exp A = A und exp log $\mu_1 = \mu_1$, wobei log μ_1 durch $\lim\limits_{t\downarrow o} t^{-1}(\mu_t - \varepsilon_o)$ gegeben ist. Schließlich ist $A*A = D^2\langle\mu_t,.\rangle(o)$; daher ist die Identität

$$\sum \frac{t^n}{n!}\langle A^{*n},f\rangle = \langle\mu_t,f\rangle$$

eine schwache Taylorentwicklung von (μ_t).

<u>G. Schlichting</u>: Groups of bounded degree.

Es wurde ein einfacher Beweis für das folgende Theorem von C.C. Moore gegeben:

Genau dann sind alle irreduziblen, unitären, stetigen Darstellungen einer lokalkompakten Gruppe endlichdimensional mit gleichmäßig beschränktem Grad, wen es eine abelsche normale Untergruppe von endlichem Index gibt.

Auf den Zusammenhang zur Theorie der ergodischen Automorphismen kompakter Gruppen wurde kurz eingegangen. Darüber hinaus wurden Verallgemeinerungen erwähnt auf den

Fall homogener Transformationsgruppen G auf G/H mit H kompakt. Diese Ergebnisse haben Anwendungen für das Studium von Automorphismengruppen, die gewisse Endlichkeitsbedingungen erfüllen.

T. Byczkowski: Gaussian measures on metric Abelian groups.

Es seien G eine abelsche Gruppe und $\mathfrak{B}$ eine σ-Algebra auf G. $(G,\mathfrak{B})$ heißt meßbare Gruppe, falls Addition und Inversenbildung meßbare Abbildungen sind. Ist G eine meßbare Gruppe, und bezeichnet $\psi: G\times G \longrightarrow G\times G$ die durch $\psi(x,y) = (x+y,x-y)$ $(x,y\in G)$ definierte Abbildung, so heißt ein W-Maß μ auf G Gaußsch, wenn es zwei W-Maße ν_1, ν_2 gibt, so daß $\psi(\mu\otimes\mu) = \nu_1\otimes\nu_2$ ist.

Es gelten die folgenden Resultate:

Satz 1: Ist μ ein symmetrisches Gaußsches Maß auf G, und ist $f: G \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine meßbare subadditive Funktion, die zusätzlich die Bedingung $f(x)\leq f(2x)$ erfüllt, so ist für ein $\varepsilon > 0$

$$\int \exp\big(\varepsilon f(x)\big)\, d\mu(x) < \infty .$$

Satz 2: Es sei μ ein Gaußsches Maß auf der meßbaren Gruppe G. Ist F eine Untergruppe von G, so daß $F\in\mathfrak{B}$ und G/F torsionsfrei ist, so ist $\mu(F) = 0$ oder $\mu(F) = 1$. Ist zusätzlich die Abbildung $x \longrightarrow 2x$ bimeßbar, so gilt die obige Behauptung sogar für alle Untergruppen $F\in\tilde{\mathfrak{B}}^{\mu}$, so daß G/F torsionsfrei ist.

Satz 3: Es sei G eine vollständige, metrische, separable abelsche Gruppe, so daß die Abbildung $x \longrightarrow 2x$ injektiv ist. Ist μ ein Gaußsches Maß auf G ohne idempotenten Faktor, so ist $\mu(F)=0$ oder $\mu(F)=1$ für alle Untergruppen $F\in\tilde{\mathfrak{B}}^{\mu}$.

W. v. Waldenfels: Averaging of atomic decay rates by random impacts.

The object of the talk was to give a simple mathematical model for the following physical phenomenon: Assume an atom with a degenerate energy level in which the states have different life times. Observation however yields (without special precautions) only an averaged life time equal for any state of the energy level. This is due to random impacts mixing the states. The mathematical model is the following: The states of the atomic level span a finite dimensional Hilbert space $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^d$. The state of the atom at time t is described by a d×d - density matrix $\rho(t)$, which is positive definite and of trace 1.

$\rho(t) = X(t)\,\rho(o)\,X(t)^*$ where

$$X(t) = e^{-\gamma/2(t-t_n)}\,U_n\,e^{-\gamma/2(t_n-t_{n-1})}\,U_{n-1}\cdots e^{-\gamma/2(t_2-t_1)}\,U_1\,e^{-\gamma/2\,t_1}$$

where $\gamma = (\gamma_{ii}\,\delta_{ik})$ is the matrix of the decay rates and γ_{ii} is the decay rate of the i-th state. The impact times $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_1$ are the jumping points of a Poisson process with mean density c, i.e. the $t_k - t_{k-1}$ are i.i.d. with respect to the law $ce^{-c\tau}d\tau$. The matrices $U_n, \ldots, U_1$ are unitary i.i.d. and distributed with respect to Haar measure; they are describing the effect of the random impacts. One assumes uniform distribution at time o, i.e. $\rho(o) = d^{-1}\mathbb{1}$ ($\mathbb{1}$ = unit matrix). One gets

1) $E\,\rho(t) = d^{-1}\,e^{-\bar{\gamma}t}\,E\,\tilde{\rho}(t)$

with $\rho(t) = d^{-1}\,e^{-\bar{\gamma}t}\,\tilde{\rho}(t)$, where $\bar{\gamma} = d^{-1}\mathrm{Tr}\,\gamma$ is the averaged decay rate:

$$d^{-1}E(\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}(t) - \mathbb{1})^2) = 2((1+\kappa_2 e^{\kappa_2 ct}) - 1) + \text{higher terms}$$

for $\|\gamma\|/c \ll 1$ (i.e. many impacts during the lifetime of the energy level) with $\kappa_2 = \mathrm{Tr}(\gamma - \bar{\gamma}\mathbb{1}/d)^2 c^{-2}$.
For times of the order of magnitude $o \leq t \leq \|\gamma\|^{-1}$ one has therefore $\kappa_2 ct \lesssim \|\gamma\|/c \ll 1$ and $E\,\tilde{\varrho}(t) \approx \mathbb{1}$ and $E\,\varrho(t) \approx e^{-\bar{\gamma}t}\mathbb{1}/d$.

2) The last considerations yield more, namely

$$\tilde{\varrho}(t) \approx e^{-\bar{\gamma}t}\mathbb{1}/d \quad \text{for } o \leq t \leq \|\gamma\|^{-1}.$$

This result can be made more concise:

$$\mathrm{Prob}\left\{\max_{0\leq\tau\leq t} d^{-1}\,\mathrm{Tr}(\tilde{\varrho}(t)-\mathbb{1})^2 \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon^{-1}2((1+\kappa_2)e^{\kappa_2 ct}-1)$$
$$+ \text{ higher terms.}$$

So even the maximal deviation from $\varrho(t)$ to $e^{-\bar{\gamma}t}\mathbb{1}/d$ can be controlled for times of the order of magnitude $o \leq t \leq \|\gamma\|^{-1}$.
The mean tool for proving this result is that the sequence $\mathrm{Tr}\,\tilde{\varrho}(o)$, $\mathrm{Tr}\,\tilde{\varrho}(t_1-)$, $\mathrm{Tr}\,\tilde{\varrho}(t_2-)$,... forms a submartingale.

<u>J.P.Roth</u>: Semi-groupes de convolution de mesures matricielles.

Es sei G ein lokalkompaktes Monoid mit Einselement. M_n bezeichne den Raum der $n\times n$-Matrizen, versehen mit der Operatornorm. $\mathcal{C}_o(G, \mathbb{R}^n)$ sei die Menge der stetigen Funktionen von G in den $\mathbb{R}^n$, die im Unendlichen verschwinden. Ferner sei $\mathbb{B} = \{m \in M_n : \|m\| \leq 1\}$. Es gelten die folgenden Resultate:

Satz 1: Es sei $(\mu_t)_{t\geq o}$ eine Kontraktionshalbgruppe von matrixwertigen Maßen auf G. Es existiert eine Kontraktionshalbgruppe $(\nu_t)_{t\geq o}$ von positiven Maßen auf $\mathbb{B}\times G$, so daß für alle $f \in \mathcal{C}_o(G, \mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int_G f(x)\, d\mu_t(x) = \int_{\mathbb{B}\times G} mf(x)\, d\nu_t(m,x) .$$

Satz 2: Es sei A ein Operator auf $\mathcal{C}_o(G, \mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich D(A). A besitze die folgenden Eigenschaften:

1) D(A) ist dicht in $\mathcal{C}_o(G, \mathbb{R}^n)$,

2) A ist linksinvariant (d.h. für alle $x \in G$ gilt $\tau_x(D(A)) \subset D(A)$ und $\tau_x \circ A = A \circ \tau_x$),

3) A erfüllt das Maximumprinzip bzgl. der Norm: für alle $f \in D(A)$ und alle $x \in G$ folgt aus $|f(x)| = \|f\|$, daß $\langle f(x), Af(x) \rangle \leq 0$ ist.

Dann existiert eine Kontraktionshalbgruppe $(\mu_t)_{t \geq 0}$ von matrixwertigen Maßen auf G, so daß für alle $f \in D(A)$ gilt:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mu_t(f) - f(e)}{t} = Af(e) .$$

W. Hazod: Subordination von Faltungs- und Operatorhalbgruppen.

Es sei $(\mu_t)_{t \geq 0}$ eine Halbgruppe von W-Maßen auf einer lokalkompakten Gruppe G ($\mu_0 = \varepsilon_0$, $\lim\limits_{t \to 0} \mu_t = \mu_0$). Für W-Maße F auf $\mathbb{R}_+$ kann man die Mischungen $\int \mu_t dF(t)$ betrachten. Die Abbildung $F \longrightarrow \int \mu_t dF(t)$ ist ein Homomorphismus. Insbesondere gilt: Ist $(F_s)_{s \geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe in $M^1(\mathbb{R}_+)$ ("Subordinator"), so bildet $(\nu_s)_{s \geq 0}$ mit $\nu_s = \int \mu_t dF_s(t)$ für alle $s \geq 0$ eine Faltungshalbgruppe in $M^1(G)$. Die Abbildung $((\mu_t),(F_s)) \longrightarrow (\int \mu_t dF_s(t))$ ist stetig bzgl. der schwachen Konvergenz, gleichmäßig in (s,t) auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Dies ermöglicht es, verschiedene Grenzwertsätze abzuleiten. Außerdem kennt man z.B. die folgenden Aussagen:

(i) Ist (ν_t) eine Gaußsche Halbgruppe, so existiert ein $c > 0$, so daß für alle $t \geq 0$ gilt: $\mu_t = \nu_{ct}$.

(ii) Ist für alle $t \geq 0$ $\nu_t = \exp t\alpha(\varepsilon_x - \varepsilon_e)$ mit $x^2 \neq e$, so ist ebenfalls für ein $c > 0$ $\mu_t = \nu_{ct}$ für alle $t \geq 0$.

(iii) Ist (μ_t) oder (F_t) ein Poissonsche Halbgruppe, so ist auch (ν_t) eine Poissonsche Halbgruppe und umgekehrt.

Auf Grund der obigen Aussagen stellt sich das folgende Problem: Welches sind die Halbgruppen (μ_t) mit erzeugender Distribution A ohne Gaußanteil und mit beschränktem Lévyanteil? Es wird vermutet, daß dies gerade die Halbgruppen (μ_t) sind, für die für alle t>o gilt: $\mu_t^{-1} \in M^1(G)$.

Anschließend wurde eine allgemeine Definition der stabilen Verteilungen untersucht, die gegenüber Gruppenhomomorphismen invariant bleibt.

R.M. Dudley: Limit theorems in GL(2, $\mathbb{R}$).

Let $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ be independent with distribution $N(o, K/n)$. One defines

$$C^{(j)} := \begin{pmatrix} AX_j & BY_j \\ BX_j & AY_j \end{pmatrix} \quad (j \geq 1) \text{ and } C^{n,\pi} := C^{(n)}C^{(n-1)}\ldots C^{(1)}.$$

Hung Cheng (M.I.T.), in work on high-energy scattering, found that if K and n are large, then $\| C^{n,\pi} \|$ tends to be large if $B^2 > A^2$ and small if $B^2 < A^2$.

The problem is to deduce such a result from the theorems of D.Wehn (1962, Proc. Nat. Acad. Sci. USA) and H. Furstenberg (1963, Trans. Amer. Math. Soc. 1o8). Even in this special case, the calculations offer some interesting problems.

E. Dettweiler (Tübingen)