MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 7/1978

Funktionentheorie

12.2. bis 18.2.1978

In der diesjährigen Tagung über Funktionentheorie wurde mehr die geometrische Richtung betont. Die Leitung bestand aus den Herren Ch. Pommerenke (Berlin), K. Strebel (Zürich) und H. Wittich (Karlsruhe); Herr Wittich war leider krankheitshalber an der Teilnahme verhindert. Von den 49 Teilnehmern hielten 26 Vorträge; die Vortragsdauer variierte zwischen 30 und 45 Minuten. Leider mussten einige Teilnehmer aus Zeitgründen gebeten werden, ihre Vorträge abzusagen. Entsprechende Vortragsauszüge sind mit einem * gekennzeichnet.

Wie aus der Teilnehmerliste ersichtlich ist, hatte die Tagung einen ausgesprochen internationalen Charakter; sie war entsprechend interessant. Der Nachteil war allerdings, dass bedauerlicherweise von den Nachwuchskräften aus dem deutschsprachigen Raum nur wenige eingeladen werden konnten. In der nächsten Tagung, die wiederum als Lerntagung konzipiert ist, soll der Ausgleich geschaffen werden.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer

D. Aharonov, London/Haifa
J.M. Anderson, London
J. Becker, Bern
H. Begehr, Berlin
D.A. Brannan, London
J. Clunie, London
P.L. Duren, Ann Arbor
H. Epheser, Hannover
T. Erkama, Helsinki
C.H. FitzGerald, Baltimore
G. Frank, Hagen
F. Gackstatter, Aachen
F.W. Gehring, Ann Arbor
K. Habetha, Aachen
G. Halasz, Budapest
W.K. Hayman, London
M. Heins, College Park
A. Huber, Zürich
F. Huckemann, Berlin
J.A. Hummel, College Park
K.-H. Indlekofer, Paderborn
J.A. Jenkins, St. Louis
W.E. Kirwan, College Park
H. Köditz, Hannover
F.D. Lesley, Giessen
W. Luh, Darmstadt
A. Marden, Minneapolis
E. Mues, Karlsruhe
E. Netanyahu, Haifa
R. Nevanlinna, Helsinki
E. Peschl, Bonn
G. Piranian, Ann Arbor
Ch. Pommerenke, Berlin
N. Purzitsky, Berlin
E. Reich, Minneapolis
H.M. Reimann, Bern
M. von Renteln, Giessen
S. Rickman, Helsinki
G. Schober, Bloomington
H.S. Shapiro, Stockholm
U. Srebro, Haifa
A. Steiner, Solothurn
K. Strebel, Zürich
T. Suffridge, Lexington
O. Tammi, Helsinki
H. Tietz, Hannover
St. Timmann, Hannover
J. Winkler, Berlin
A. Wohlhauser, Lausanne

Vortragsauszüge

J.M. ANDERSON: Potenzreihen $\Sigma a_n z^n$ mit $\Sigma |a_n| = \infty$

Bekanntlich gibt es Funktionen $\Sigma a_n z^n$ mit $\Sigma |a_n| = \infty$ die am Rand $|z| = 1$ stetig sind. Für eine beliebige Folge $\Lambda = \{\lambda_n\}$ von natürlichen Zahlen hat Rudin bewiesen, dass eine Funktion $f(z) = \Sigma a_n z^n$ existiert, die am Rand stetig ist, aber $\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| = \infty$. Der Beweis von Rudin ist nicht-konstruktiv. Ich konstruiere eine $f(z)$ die auf $|z| = 1$ stetig ist, für die aber $\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda|^{2-\varepsilon}$ divergiert, wobei $\varepsilon > 0$ und Λ vorgeschrieben sind.

H. BEGEHR: Verallgemeinerte analytische Funktionen und die Formeln von Plemelj-Sokhotski

Mit Hilfe der Cauchy-Kern-Funktionen für verallgemeinerte analytische Funktionen lassen sich die Plemelj-Sokhotski Formeln für Lösungen von $(w = w(z,t))$

$$(1) \qquad w_{\bar{z}t} + aw_t + b\bar{w}_t + cw + d\bar{w} = 0 \qquad (z \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R})$$

herleiten, wenn die Koeffizienten a,b,c,d nur von der Variablen z abhängen, zu $L_p(G)$ $(2 < p,\ G$ endliches Gebiet) gehören und ausserhalb G identisch verschwinden. Lösungen von (1) genügen $(\zeta = \xi + i\eta,\ w_o = w(z,0))$

$$w - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (aw+b\bar{w}) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \int_{o}^{t} (cw+d\bar{w})\, d\tau \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} =$$
$$= w_o - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (aw_o + b\bar{w}_o) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} + \sum_{k=o}^{+\infty} a_k(t) z^k ,$$

wo die Potenzreihe in $\mathbb{C}$ konvergiert und die a_k differenzierbare Funktionen sind, die nur von der Lösung w abhängen. Mit (2) lassen sich unter Verwendung des erzeugenden Paares der Gleichung

$$w_{\bar{z}} + aw + b\bar{w} = 0$$

spezielle (beschränkte) Lösungen von (2) konstruieren, die neben den Formeln von Plemelj-Sikhotski zur Darstellung der allgemeinen Lösung des Problems (1) unter der Bedingung

$$(3) \qquad w^+(z,t) = g(z)w^-(z,t) + \gamma(z,t) \qquad (z \in \partial G,\ t \in \mathbb{R})$$

benötigt werden. Dabei sind g und γ Hölderstetige Funktionen von z auf Γ mit $g(z) \neq 0$, $\gamma(z,0) \equiv 0$ und γ in t differenzierbar.

DAVID A. BRANNAN: Some covering theorems

The author will discuss problems in the following general area:

(1) Can a (strictly) p-valent function analytic and conformal in the unit disc take every value p times?

(2) What effect do critical points of f have on (1)?

(3) If a number of criteria for finite or uni-valency are weakened, what effect does this have on the valency of f ?

JAMES CLUNIE: Behaviour of Taylor series

Let G be a domain in $\mathbb{C}$ supporting non-constant bdd. analytic functions and $B_H(G)$ be the space of functions bdd. and analytic in G. Let $\zeta \in G$ and set

$$B_n = B_n(Z;G) = \sup\left\{\frac{|f^{(n)}(\zeta)|}{n!} : f \in B_H(G) \ , \ \|f\|_\infty \leq 1\right\} .$$

ζ is called a Riemann-Lebesgue centre (R.L.C.) of G if and only if $\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \Big/ B_n \xrightarrow[n]{} 0$ for each $f \in B_H(G)$.

If D is the unit disc then for any domain G such that $D \subseteq G \subseteq D \cup \{z \in \mathbb{C} : |\arg(-z)| < \beta\}$, where $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, the origin is a R.L.C. If G is such that $\zeta \in G$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C}: |z-\zeta| < 1\} \subseteq G$ and $0 < \# \, \partial\Delta \cap \partial G < \infty$ and from each point of $\partial\Delta \cap \partial G$ emanates a half-line in G^c then ζ is not a R.L.C. of G .

Hence given any $n \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ there is a domain G containing precisely n R.L.C.s. For example, if $n = 3$ take G to be the union of the inside of a triangle and small discs centred at the vertices. Then the vertices are the only R.L.C.s of G . If $n = \aleph_0$ take G , to be the union of a large disc and countably many suitable 'small' discs centred on the boundary of the former. Then the centres of the discs are the only R.L.C.s of G .

P.L. DUREN: Logarithmic coefficients of univalent functions

The logarithmic coefficients of $f \in S$ are defined by

$$g(z) = \log\frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k z^k .$$

It is shown that for each $f \in S$ with Hayman index $\alpha > 0$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2|\gamma_k|^2 = O(n) ,$$

which gives the estimate

$$M_2(r,f'/f) = O((1-r)^{-1/2})$$

for integral means of order 2. Thus g belongs to the smoothness class $\Lambda^2_{1/2} \subsetneq \mathrm{BMO}$. For the full class S , the estimate $s_n = O(n \log n)$ is best possible. (Joint work with Y.J. Leung)

TIMO ERKAMA: Quasiconformally homogeneous continua

A continuum C on the Riemann sphere is called quasiconformally homogeneous if for each pair of points P and $Q \in C$ there is a quasiconformal map ϕ defined in a neighborhood of C such that $\phi C = C$ and $\phi(P) = Q$. We show that every nondegenerate quasiconformally homogeneous continuum is a quasicircle. For the proof we introduce a measure for the "local quasiconformal dilatation" of the boundary of a simply connected domain.

CARL H. FITZGERALD: Determining the Nature of an Analytic Function from some of its Boundary Values

Let $f(x)$ be a complex-valued function given on an analytic arc γ . Consider a simply connected domain having γ as a part of its boundary. A method is given for testing whether there is a bounded analytic function on the domain having boundary values on γ which agree with f. Even if such an analytic extension of f exists, the function f is not necessarily analytic on γ. The proof shows how to determine values of the extension of f in the domain in a constructive way.

F.W. GEHRING: Spirals and a problem in conformal mapping

Suppose that D is a simply connected domain of hyperbolic type in the extended complex plane $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. For each function ϕ defined in D we introduce the norm

$$\|\phi\|_D = \sup_{z \in D} |\phi(z)| \rho_D(z)^{-2} .$$

Next for each function f which is locally univalent and meromorphic in D we let S_f denote the Schwarzian derivative for F,

$$S_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 .$$

The purpose of this talk is to settle a conjecture of Lipman Bers on the universal Teichmüller space by establishing the following result.

Theorem. There exists a simply connected domain D of hyperbolic type and a positive constant δ with the following property. If f is conformal in D and if $\|S_f\|_D \leq \delta$, then $f(D)$ is not a Jordan domain.

G. HALASZ: Projektionen stetiger Funktionen

T_n sei eine Folge von linearen Operatoren des Raumes stetiger periodischer Funktionen $f(x)$ mit der Periode 2π in den Raum der trigonometrischen Polynome der Ordnung n, welche jedes solche Polynom invariant lassen. Mit den Definitionen

$$\|T_n(x)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |T_n f|_x| , \quad \|f\| = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|$$

behauptet der Satz von Lozinski-Harshiladze:

$$\sup_{0\le x\le 2\pi} \|T_n(x)\| \ge \sup_{0\le x\le 2\pi} \|T_n^*(x)\| \sim c \log n ,$$

wobei T_n^* der die partiellen Summen der Fourierreihen bildende Operator ist. Der Satz impliziert, dass man keine Folge mit $T_n f \to f$ gleichmässig definieren kann. Es erhebt sich die Frage (z.B. im Band der Approximationstheorie-Tagung dieses Instituts 1968), ob man punktweise Konvergenz erzielen kann. Es wird in der strengen Form verneint:

Lebesguesches Mass von $\{x : \overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_n(x)\| = \infty\} > 0$.

Der Beweis, welcher auf der Abschätzung von Polynomen mit Hilfe Greenscher Funktionen beruht, wird skizziert.

W.K. HAYMAN: <u>The logarithmic derivative of univalent functions</u>

Let $f(z)$ be univalent in $|z| < 1$ and define

$$A(r,f,\delta) = \int \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2 dxdy ,$$

where the integral is taken over all those points of $|z| < r$, where

$$\left|\frac{z-z_1}{1-z_1 z}\right| > \delta$$

and z_1 is the zero (if any) of $f(z)$ in $|z| < 1$. Then we prove that for

$$0 \le r_1 < r_2 < 1$$

$$A(r_2,f,\delta) - A(r_1,f,\delta) \le 2\pi\{\log \frac{1}{1-r_1} + 4\log \frac{1-r_1}{1-r_2} + \log \frac{1}{\delta} + K\} ,$$

where K is an absolute constant. None of the numerical coefficients can be replaced by smaller numbers. Hence if

$$I_2(r,\tfrac{f'}{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|^2 d\theta ,$$

then

(1) $$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{1-r}{\log \frac{1}{1-r}} I_2(r,\tfrac{f'}{f}) \le 1 ,$$

(2) $$\underline{\lim_{r\to 1}} (1-r) I_2(r,\tfrac{f'}{f}) \le 4 .$$

Equality is possible in (2), and in (1) the left hand side need not be zero.

MAURICE HEINS: Realisierung nicht kompakter Riemannscher Flächen als analytische ebene Kurven

Es wird gezeigt, dass eine gegebene nicht kompakte Riemannsche Fläche eine Realisierung als eine analytische ebene Kurve gestattet. Der Beweis wird mit Hilfe des Satzes von Behnke und Stern sowie der Existenz von gewissen analytischen Funktionen auf der Fläche mit besonderen Ueberlagerungseigenschaften durchgeführt.

J.A. HUMMEL:

The b_1, b_2 coefficient body for univalent Bieberbach-Eilenberg functions is determined by finding all solutions of the Schiffer type differential equation for the appropriate extremal problems. This requires methods of numerical computation after suitable reduction and simplification.

JAMES A. JENKINS: Boundary behavior of conformal mappings

The classical problem of giving necessary and sufficient conditions for the existence of angular and unrestricted derivatives of a conformal mapping of a circular disc at a boundary point has been solved by K. Oikawa and myself in the sense that these conditions involve conformal modules and other geometric conditions. A solution has also been given in purely Euclidean terms for the existence of the corresponding limits for the argument. The problem is reduced in the now familiar manner introduced by Ahlfors to the question of the mapping f of a strip domain $S : |Iz| < \frac{\pi}{2}$ such that the boundary element determined by the positive real axis corresponds to a similar boundary element. The problems to be solved then reduce to finding necessary and sufficient conditions for the existence of $\lim(f(z)-z)$ and $\lim I(f(z)-z)$ as

z tends to the above boundary element either in a substrip $S_\delta : |Iz| < \frac{\pi}{2} - \delta, \ 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ or in the full strip S .

A typical solution is the following: A necessary and sufficient condition for the existence of $\lim\limits_{S_\delta \ni z \to +\infty} (z - f(z))$ (subject to certain simple basic assumptions) is $m(a,b) = \frac{1}{\pi}(b-a) + 0(1)$ as $b > a \to \infty$ where $m(a,b)$ is the module of the quadrangle determined on $f(S)$ by ordinate segments at a and b meeting the real axis.

W.E. KIRWAN: Extremal properties of a class of slit conformal mappings

Let U denote $\{z : |z| < 1\}$ and $H(U)$ the linear space of functions analytic in the unit disc endowed with the topology of uniform converge on compact subsets of U . The usual set, S , of normalized univalent functions is a compact subset of $H(U)$. Denote by σ the set of support points of S , i.e., those functions $f \in S$ that satisfy

$$\operatorname{Re} L(f) = \max_{g \in S} \operatorname{Re} L(g)$$

for some non-constant continuous linear functional on S . By a result of Hengartner and Schober it is known that for $f \in \sigma$, $|a_2| > 1$. Through use of their work and the Löwner equation it is shown that in fact $|a_2| > \sqrt{2}$ and that this estimate is best possible for a class of slit conformal mappings that contains σ .

HELMUT KOEDITZ: Fortsetzung holomorpher Funktionen auf Riemannsche Flächen

Sei F eine (nicht kompakte) Riemannsche Fläche. Eine auf F holomorphe Funktion f heisst fortsetzbar, wenn es eine RFl. G , ein auf G holomorphes g sowie eine (schlichte, nicht surjektive) Einbettung $\varphi : F \to G$ gibt, d.d. gilt: $f = g|_{\varphi(F)} \circ \varphi$. Versieht man die Menge $H(F)$ der auf F holomorphen Funktion mit der Topologie der kompakten Konvergenz, so wird $H(F)$ zu einem topologisch vollständigen Raum. Eine Teil-menge eines solchen Raumes heisst mager, wenn sie Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Menge ist. Es wird gezeigt, dass die Menge der fortsetzbaren Funktion in $H(F)$ eine magere Menge ist. Darüber hinaus werden einige Aspekte (Probleme und Ergebnisse) obigen Fortsetzbarkeitsbegriffes vorgestellt.

F.D. LESLEY: Conformal mappings with derivative of vanishing mean oscillation

Let f be a conformal mapping of $|z| < 1$ onto the interior of a closed Jordan curve with continuously turning tangent. If the tangent angle $\tau(s)$ as a function of arclength s is continuous then $f' \in H^p$ for all p. If the modulus of continuity of τ satisfies a Dini condition then f' is continuous in $|z| \leq 1$. We derive a condition on the modulus of continuity of τ which guarantees that f' is of Vanishing Mean Oscillation. This condition is in a sense sharp. As a consequence, the mapping function f is smooth in the sense of Zygmund.

A. MARDEN: Conformal Embeddings of Riemann Surfaces

In joint work with Earle we consider the problem of finding canonical conformal embeddings in the homotopy class of a conformal map $f : UR_i \to S$, where each of the finite number of surfaces R_i is the interior of a compact, bordered surface not an annulus, while S is a compact bordered or closed surface not the sphere or a torus. We define a parallel embedding $f : UR_i \to S$ to be an injective conformal map which is homotopic to an injective map $f_o : UR_i \to S$ with the property that each component of $S - f_o(UR_i)$ is the closure of an annulus (f_o is in general not analytic).

Theorem. Given a parallel embedding $f : UR_i \to S$ there exists a parallel embedding $h : UR_i \to S$ uniquely determined by the following properties.

(i) h is homotopic to f ,

(ii) There exists a quadratic differential ψdz^2 on S for which $\psi dz^2 \geq 0$ on ∂S (if $\neq \phi$) and on $\partial h(UR_i)$,

(iii) Either $h(UR_i)$ is dense in S or there exists $0 < M < \infty$ such that the interior of each component of $S - h(UR_i)$ is an annulus of modulus M .

In the former case of (iii), $h = f$.

E. NETANYAHU: On the monotonicity of some functionals in the family of univalent functions (joint work with M. Schiffer)

Let S be the family of regular and univalent functions in $|z| < 1$ with the normalization $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$.
The analytic function $f(z)$ is univalent in $|z| < 1$ if and only if

$$\log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} = \sum_{m,n=o}^{\infty} d_{mn} z^m \zeta^n$$

converges in the bicylinder $|z| < 1$, $|\zeta| < 1$. Denote $c_{mn} := \sqrt{mn}\, d_{mn} . d_{mn}$ and c_{mn} are called the Grunsky coefficients belonging to f .
Consider also the odd univalent function $F(z) = \sqrt{f(z^2)}$ and denote by D_{mn} and C_{mn} the Grunsky coefficients belonging to $F(z)$.
Let $c_{mn}(d) = \operatorname*{Max}_{f \in S(d)} \{Re(c_{mn})\}$ and respectively
$C_{nn}(d) = \operatorname*{Max}_{f \in S(d)} \{Re(C_{nn})\}$, where $S(d)$ is the subclass of S defined as follows: $d_f = \inf\{|\alpha| \, | \, f(z) \neq \alpha , |z| < 1 ; f \in S\}$ and $f \in S(d)$ for $d_f = d$, $\frac{1}{4} \leq d \leq 1$.

It is proved that $C_{nn}(d) = 1$ for all values d in $[\frac{1}{4}, (\frac{1}{4})^{1/n}]$ and strictly monotone decreasing for $(\frac{1}{4})^{1/n} < d \leq 1$.

ERNST PESCHL: Fixpunktverhalten von Automorphismen beliebiger Bereiche

Für Gebiete mit endlichem Zusammenhang kann man unter Verwendung des Abbildungssatzes auf Vollkreisgebiete und des Satzes, dass solche nur Möbiustransformationen als Automorphismen zulassen, schliessen, dass ein Automorphismus höchstens 2 Fixpunkte haben kann. Herr J. Lieb hat die Frage nach dem Fixpunktverhalten von Automorphismen beliebiger Gebiete aufgeworfen und die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes vermutet. Da man für Gebiete von unendlich hohem Zusammenhang einen entsprechenden Abbildungssatz nicht zur Verfügung hat, muss man hier andere Wege gehen. Es zeigt sich, dass der jetzt vorliegende Beweis für die Richtigkeit der Liebschen Vermutung zwei Vorteile hat: (1) dass er generell für alle Gebiete, auch solche von unendlichem Zusammenhang, gilt, und (2) mit sehr viel einfacheren Mitteln arbeitet, als sie für den allgemeinen Abbildungssatz auf Normgebiete und die Gestalt ihrer Automorphismen benötigt werden. (Siehe z.B. Goluzin, Geometric Theory of Functions of a Complex Variable, Translations etc. vol. 26, 1969, p. 234 ff.) Zum Beweis werden das Schwarzsche Lemma und der Eindeutigkeitssatz von Cartan-Caratheodory, sowie ein Abbildungssatz bei Auftreten einer eingliedrigen kontinuierlichen Gruppe (siehe Bochner-Martin, Several Complex Variables, Princeton 1948, p. 19 ff.) herangezogen. Der entscheidende Teil des Beweises besteht in einer elementaren geometrischen Konstruktion mithilfe der Poincaréschen Metrik. (Preprint SFB72 Bonn, Febr. 1978, ein zweiter hiervon verschiedener Beweis wurde anschliessend von K. Leschinger (Bonn) gefunden.)

GEORGE PIRANIAN: <u>The normality characteristic</u>

This joint paper with Douglas Campbell begins with the question whether there exists a normal holomorphic function in the unit disk whose derivative and integral are both nonnormal. Slight changes in work by W,K. Hayman and D.A. Storvick lead to the example $f(z) = g(z) + 1/g(-z)$, where

$$g(z) = \exp \frac{1+z}{1-z} .$$

For $n = 1,2,\ldots$, denote by $f^{(n)}$ and $f^{(-n)}$ the n^{th} derivative and the n^{th} integral of the function $f = f^{(o)}$. Let $\varepsilon_n = \varepsilon_n(f)$ have the value 1 if $f^{(n)}$ is normal, the value 0 otherwise. We define the normality characteristic of f as the bilaterally infinite sequence

$$\{\ldots,\varepsilon_{-2},\varepsilon_{-1},[\varepsilon_o],\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots\} .$$

In the example above,

$$\text{char } g = \{\ldots,0,0,[1],1,1,\ldots\} ,$$

$$\text{char } 1/g = \{\ldots,1,1,[1],0,0,\ldots\} ,$$

$$\text{char } f = \{\ldots,0,0,[1],0,0,\ldots\} .$$

EDGAR REICH: Ein Zerlegungsproblem für quasikonforme Abbildungen

Q_I sei die Klasse aller quasikonformen Homöomorphismen des Einheitskreises auf sich selbst bei denen jeder Punkt des Einheitskreises Fixpunkt bleibt. Für $f \in Q_I$ bezeichne $K[f]$ die Maximaldilatation von f. Für jedes gegebene K, $(K > 1)$, findet sich ein $\Phi(K) < K$, mit folgender Eigenschaft:

$f \in Q_I$, $K[f] = K \Rightarrow$ Es existieren $f_1 \in Q_I$, $f_2 \in Q_I$, mit $K[f_i] \leq \Phi(K)$, $(i = 1,2)$, so dass $f = f_2 \circ f_1$.

Es sei $\Phi_o(K)$ die kleinstmögliche solche Funktion $\Phi(K)$. Bekannterweise ist $\Phi_o(K) > K^{1/2}$. Verfasser erhält obere Schranken für $\Phi_o(K)$; insb. gilt

$$\Phi_o(K) < K^{1/2} + (K-1)(K^{1/2}-1) , \quad 1 < K \leq \tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5}) .$$

H.M. REIMANN: $\|f_{\bar z}\|_\infty < \infty$

For $f = (u,v) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ the equivalence of the follwoing conditions is discussed:

$$\sup_{\substack{|a|=|b|\neq 0 \\ x\in\mathbb{C}}} \left| \frac{(f(x+a)-f(x),a)}{|a|^2} - \frac{(f(x+b)-f(x),b)}{|b|^2} \right| < \infty$$

and

$f \in ACL^2$ (gen. loc. square integrable derivatives, f cont.)

$\|f_{\bar z}\|_\infty < \infty$ and $f(x) = 0\,(|x|\log|x|)$

SEPPO RICKMAN: Equidistribution of quasiregular mappings

Let $f : R^n \to N$ be a nonconstant quasiregular mapping into a compact connected smooth Riemannian n-manifold N and let μ be a measure in N such that Borel sets are measurable, $0 < \mu(N) < \infty$, and $\mu(B(x,r)) \leq h(r)$ holds for all $r > 0$ for a strictly increasing continuous function $h : [0,\infty[\to [0,\infty[$ with $h(0) = 0$ and $\int_0^1 (h(r)^{1/pn}/r)dr < \infty$ for some $p > 2$. If $n(s,y)$, $s > 0$, $y \in N$, denotes the counting function of f with respect to the exhaustion by balls $B(s)$ and $\nu_\mu(s)$ (resp. $A(s)$) denotes the average of $n(s,y)$ with respect to μ (resp. Lebesgue measure of N), then

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ s\notin E}} \frac{\nu_\mu(s)}{A(s)} = 1$$

where E is an exceptional set of finite logarithmic measure independent of μ. We also have the following: There exists a sequence $0 < s_1 < s_2 < \ldots$ and a set $E \subset N$ of capacity zero such that $\lim_{i\to\infty} n(s_i,y)/A(s_i) = 1$ for $y \in N \setminus E$. These results are included in a joint work by P. Mattila and myself.

GLENN SCHOBER: Coefficients of inverses of meromorphic univalent functions

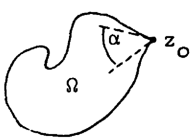
Sharp bounds are given for the coefficients B_{2n-1} , $1 \leq n \leq 7$, of the inverses of normalized meromorphic univalent functions. For the remaining values of n , sharp bounds are given in case initial segments of even coefficients are zero. Estimates are also obtained in case the functions possess quasiconformal extensions. The method uses an exponentiated form of Grunsky's inequalities.

HAROLD SHAPIRO: An analog of the F. and M. Riesz Theorem for the open disc

An equivalent form of a classical theorem of F. and M. Riesz states: If $\mu \in M(\partial\mathbb{D})$ (where $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$; $M(\partial\mathbb{D})$ is the Banach space of bounded complex measures on $\partial\mathbb{D}$) and $\{f_n\}$ are in the Hardy class $H^1(\partial\mathbb{D})$ and $\lim_{n\to\infty} \int f_n\varphi\, d\theta = \int \varphi\, d\mu$ for all $\varphi \in C(\partial\mathbb{D})$ then $d\mu = f\, d\theta$ for some $f \in H^1(\partial\mathbb{D})$. Let now $\mu \in M(\bar{\mathbb{D}})$ and $\{f_n\} \subset L^1_a(\mathbb{D})$, the Banach space of integrable analytic functions on $\mathbb{D}$ w.r.t. the measure $d\sigma = dxdy$.

Theorem: If $\lim_{n\to\infty} \int f_n\varphi\, d\sigma = \int \varphi\, d\mu$ $\forall\varphi \in C(\bar{\mathbb{D}})$ then $d\mu = f\, d\sigma$ for some $f \in L^1_a(\mathbb{D})$. The analogous theorem for smoothly bounded domains is also true. However, if Ω has a corner at z_o with angle $\alpha (\alpha \neq 0,\pi,2\pi)$ then:

Theorem:



$$\exists\{f_n\} \subset L^1_a(\mathbb{D}) \ : \ f_n d\sigma \to \delta_{(z_o)} \text{ in the n* sense,}$$

i.e. $$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\varphi\, d\sigma = \varphi(z_o) \quad \forall\varphi \in C(\bar{\mathbb{D}}) \ .$$

URI SREBRO: On the local behavior of quasiregular mappings (with Olli Martio)

Like analytic functions every nonconstant quasiregular mapping is open and discrete; and by Stoilov's theorem every plane open discrete mapping behaves, locally, as $z \to z^n$. Contrary to the situation in the plane, very little is known about the local behavior of quasiregular mappings in R^n when $n > 2$. We will show that in some cases the local behavior of open discrete mappings in R^3 can be characterized by rational functions. If $f : S^2 \to S^2$ is a rational function acting on the Riemann sphere $S^2 = \{x \in R^3 : |x| = 1\}$, then the radial extension $f : B^3 \to B^3$ of f, which is defined by $f(tx) = tf(x)$ for $x \in S^2$ and $0 \leq t < 1$, is continuous, open and discrete and its branch set B_f and branch set image fB_f are unions of line segments emanating from 0. We will show that if $f: G \to R^3$ is open and discrete with $0 \in f(0) \in G$ and if fB_f is contained in a finite union of rays emanating from 0, then, locally, f behaves like a radial extension of a rational function, which is uniquely determined up to a precomposition with a Möbius transformation.

TED SUFFRIDGE: A new Criterion for Starlikeness

Assume $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ is analytic in the unit disk $|z| < 1$. For fixed α, $\alpha < 1$, consider the quadratic form

$$H_f(z_1, z_2, \ldots) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big[\Big| \sum_{k=1}^{\infty} (k+1-2\alpha) a_k z_{k+\ell} \Big|^2 - \Big| \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_{k+1} z_{k+\ell} \Big|^2 \Big],$$

where $\{z_k\}$ is an arbitrary sequence of complex numbers such that $\limsup_{k\to\infty} |z_k|^{1/k} < 1$. Then f is starlike of order α (i.e. $\mathrm{Re}\,\dfrac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha$, $|z| < 1$) if and only if H_f is non-negative definite.

The above result leads to new proofs of standard coefficient inequalities as well as some new results.

OLLI TAMMI: On methods of finding sharp inequalities for bounded univalent functions

By using Löwner expressions and direct estimation some sharp inequalities are derived which are good for determining the first coefficient body for bounded univalent functions. The inequalities are generalizations of former Grunsky type conditions.

Kurt Strebel, Zürich