MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 12/1978

Arbeitsgemeinschaft Geyer-Harder

$SL_2(\mathbb{R})$

19. 3. bis 25. 3. 1978

Die Frühjahrstagung der Arbeitsgemeinschaft wurde von G. Harder (Bonn/Wuppertal) und J. Rohlfs (Bonn) geleitet.

Teilnehmer

Bartels, Göttingen
Becker, Köln
Borchers, Heidelberg
Bröcker, Regensburg
Draxl, Bielefeld
tom Dieck, Göttingen
Faltings, Münster
Fischer, Bremen
Forster, Münster
Freitag, Heidelberg
Frey, Saarbrücken
Gamst, Bremen
Gerritzen, Bochum
Geyer, Erlangen
Grunewald, Bielefeld
Hahnel, Wuppertal
Harder, Wuppertal
Helling, Bielefeld
Jantzen, Bonn
Kani, Heidelberg
Kiehl, Mannheim
Knebusch, Regensburg
Kneser, Göttingen
Kraft, Bonn
Lai, z. Zt. Bonn
Lorenz, Münster
Maus, Göttingen
Mendoza, Wuppertal
Mennicke, Bielefeld
Miller, Karlsruhe
Ogg, z. Zt. Bonn
Opolka, Münster

Poguntke, Bielefeld

Ramanathan, z. Zt. Bonn

Rohlfs, Bonn

Schappacher, Göttingen

Schleich, Wuppertal

Schlichting, München

Schwermer, Bonn

Siebeneicher, Bielefeld

Stuhler, Göttingen

Wirthmüller, Regensburg

Das erste Ziel der Tagung war, die Darstellungstheorie von $GL_2(k)$, $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, zu erarbeiten. Ausgehend von der allgemeinen Theorie der Banachdarstellungen von reellen Liegruppen G (abzählbar im Unendlichen) wurde das Problem der Klassifikation von zulässigen, topologisch vollständig irreduziblen Darstellungen von G algebraisiert und auf die Bestimmung der irreduziblen $(\underline{g},K)$ - Moduln zurückgeführt. Dabei bezeichnet $\underline{g}$ die Liealgebra von G, und K eine maximal kompakte Untergruppe von G. Eine vollständige Klassifikation aller irreduziblen $(\underline{g},K)$ - Moduln wurde für $G = GL_2(k)$, $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, gegeben. Anschließend an die Bestimmung der unitären irreduziblen Darstellungen von $SL_2(\mathbb{R})$ wurden Matrixkoeffizienten solcher Darstellungen und deren Differentialgleichungen behandelt. Die Plancherel - Formel für $SL_2(\mathbb{R})$ und ihre Bedeutung wurden ausführlich diskutiert.

Daran schloß sich das Studium der irreduziblen zulässigen Darstellungen von $GL_2(F)$, F = nicht-archimedischer lokaler Körper, an; über die Konstruktion von sogenannten supercuspidalen Darstellungen mit Hilfe des Begriffs der Weil - Darstellung wurde berichtet.

Die bis dahin erarbeitete lokale Theorie wurde dazu benutzt, die Zusammenhänge der Darstellungstheorie von $GL_2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A}$ = Ring der Adele von $\mathbb{Q}$, mit der Theorie der automorphen Formen darzulegen. Über die Vermutung von Weil, die zwischen der Hasse - Weil - Zeta - Funktion einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$ mit Führer N und der Zeta - Funktion einer gewissen Spitzenform vom Gewicht zwei bezüglich $\Gamma_0(N)$ eine Korrespondenz herstellt, wurde berichtet. Sie wurde dann in allgemeinerer Form darstellungstheoretisch formuliert. Aufbauend auf diese, in Spezialfällen klassischen Zusammenhänge zwischen elliptischen Kurven, automorphen Formen und Darstellungstheorie schloß die Tagung mit einer skizzenhaften Einführung in die sogenannte "Langlands - Philosophie"; insbesondere wurde die Korrespondenz zwischen den Äquivalenzklassen zweidimensionaler Darstellungen der Weilgruppe $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ von $\mathbb{R}$ und den Äquivalenzklassen irreduzibler zulässiger Darstellungen von $GL_2(\mathbb{R})$ hergestellt.

Vortragsauszüge

E. Becker: Grundbegriffe der Darstellungstheorie

Für Banachdarstellungen von lokalkompakten Gruppen bzw. Algebren über $\mathbb{C}$ wurden die Begriffe der algebraischen, der algebraisch vollständigen, der topologischen, der topologisch vollständigen Irreduzibilität eingeführt. Schurs Lemma wurde bewiesen. Es wurde gezeigt, daß eine zulässige topologisch irreduzible Darstellung auch topologisch vollständig irreduzibel ist.

Außerdem wurde über Cartan- und Iwasawa-Zerlegung von $GL_2(\mathbb{R})$ und $GL_2(\mathbb{C})$ berichtet.

G. Harder: Zulässigkeit von topologisch vollständig irreduziblen Darstellungen

Sei $\pi: G \longrightarrow GL(E)$ eine topologisch vollständig irreduzible Banachdarstellung einer halbeinfachen reellen Liegruppe mit endlichem Zentrum. Mit der Methode von Godement (Trans. Amer. Math. Soc., 73 (1952), pp. 496 - 556) wurde gezeigt, daß für jede irreduzible Darstellung δ einer maximal kompakten Untergruppe K von G für die Multiplizität $m(\delta)$ von δ in $\pi_{|K}$ gilt: $m(\delta) \leq \dim \delta$. Für $G = SL_2(\mathbb{C})$ wurde nachgewiesen, daß $m(\delta) \leq 1$ gilt.

H. Faltings: Differenzierbare und analytische Vektoren

Ist $\pi: G \longrightarrow GL(E)$ eine Banachdarstellung einer reellen Liegruppe G (abzählbar im Unendlichen), so heißt $x \in E$ differenzierbarer bzw. analytischer Vektor für π, wenn die Abbildung $g \longmapsto \pi(g)x$ ein Element von $C^{\infty}(G,E)$ bzw. $C^{\omega}(G,E)$ ist. Der Raum der differenzierbaren (bzw. analytischen) Vektoren liegt dicht in E. Ist (π, E) zulässig, K maximal kompakte Untergruppe von G, so besteht der Raum E_K der K - endlichen Vektoren von E aus analytischen Vektoren.
Es wurde der Begriff des $(\underline{g},K)$ - Moduls, $\underline{g}$ = Liealgebra von G, eingeführt und folgender Satz gezeigt: Eine zulässige Darstellung (π, E) ist genau dann topologisch vollständig irreduzibel, wenn E_K ein algebraisch irreduzibler $(\underline{g},K)$ - Modul ist.

H. Kraft: Irreduzible $(\mathfrak{g},K)$ - Moduln für $G = GL_2(\mathbb{R})$

Sei $G = GL_2(\mathbb{R}) = N.A.K^o$ mit $N = \left\{\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, $A = \left\{\begin{pmatrix}t_1 & 0 \\ 0 & t_2\end{pmatrix}\right\}$, $K = O_2(\mathbb{R})$, $K^o = SO_2(\mathbb{R})$. Ausgehend von einem Quasicharakter $\mu : A \longrightarrow \mathbb{C}^*$ $\mu\begin{pmatrix}t_1 & 0 \\ 0 & t_2\end{pmatrix} = |t_1|^{s_1}.|t_2|^{s_2}\, \mathrm{sgn}\, t_1^{m_1}.\mathrm{sgn}\, t_2^{m_2}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, m_1, $m_2 \in \{0,1\}$ betrachtet man die induzierte Darstellung von G auf

$$E(\mu) := \left\{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid f_{|K} \in L^2,\ f(nag) = \mu(a) \left|\frac{t_1}{t_2}\right|^{1/2} f(g) \right\}$$

sowie den zugehörigen $(\mathfrak{g},K)$ - Modul der K - endlichen Vektoren. Setzt man $s := s_1 - s_2$, $m = |m_1 - m_2|$, $j := s_1 + s_2$, so ist die Darstellung irreduzibel ausgenommen in den beiden Fällen $s \in \mathbb{N}^+$, $s - m$ ungerade, und $-s \in \mathbb{N}^+$, $s - m$ ungerade, wo es eine Kompositionsreihe mit zwei Faktoren gibt, einer davon endlichdimensional. Man erhält auf diese Weise alle irreduziblen $(\mathfrak{g},K)$ - Moduln und kann auch in den Termen s und m die Äquivalenzen beschreiben.. Für den Beweis konstruiert man zunächst alle irreduziblen $(\mathfrak{g},K^o)$- Moduln, und beschreibt dann die Zerlegung eines $(\mathfrak{g},K)$ - Moduls in $(\mathfrak{g},K^o)$ - Moduln, unter Benutzung der Wirkung des Elements $\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \in K \setminus K^o$

J.C. Jantzen: Irreduzible $(\mathfrak{g},K)$ - Moduln für $G = GL_2(\mathbb{C})$

Für $G = GL_2(\mathbb{C})$ und $K = SU(2)$ wurden die einfachen $(\mathfrak{g},K)$ - Moduln konstruiert und gezeigt, daß sie durch ihren zentralen Charakter und die auftretenden K - Typen eindeutig klassifiziert werden. Für die Moduln, die von eindimensionalen Darstellungen der Boreluntergruppe induziert werden, wurden die Kompositionsfaktoren bestimmt und gezeigt, daß jeder einfache $(\mathfrak{g},K)$ - Modul als Untermodul in einer solchen induzierten Darstellung auftritt.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

O. Forster: Unitäre Darstellungen und diskrete Serie

Es wurden die unitarisierbaren irreduziblen Darstellungen von $SL_2(\mathbb{R})$ bestimmt. Es handelt sich dabei neben der trivialen Darstellung um die Darstellungen der sogenannten Hauptserie, komplementären Serie, diskreten Serie und "mock" diskreten Serie. Für die diskrete Serie kann man eine Realisierung wie folgt beschreiben: Sei $m \geq 2$ eine natürliche Zahl. Sei $E = L^2_{hol}(H, d\mu_m)$ der Hilbertraum aller auf der oberen Halbebene $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C},\ y > o\}$ bzgl. des Maßes $d\mu_m = y^{m-2} dxdy$ quadratintegrierbaren Funktionen. Die durch

$$(\pi_m(s)f)(z) := f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) |cz+d|^{-m} \quad , \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = s^{-1}$$

definierte Darstellung $\pi_m: SL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow GL(E)$ ist unitär und irreduzibel mit niedrigstem Gewicht m. Die Matrixkoeffizienten dieser Darstellung liegen in L^2, für $m \geq 3$ sogar in L^1.

T. tom Dieck: Matrixkoeffizienten der irreduziblen Darstellungen von $SL_2(\mathbb{R})$

In Anlehnung an die Arbeit von Bargmann (Ann. of Math. 48, (1947), pp. 568 - 640) über die unitären Darstellungen von $SL_2(\mathbb{R}) = SU(1,1)$ wurde über die Matrixkoeffizienten der irreduziblen Darstellungen und deren Differentialgleichungen berichtet. Ist $\pi: G = SL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow GL(E)$ eine irreduzible Darstellung in einem Hilbertraum E mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, sind $v, w \in E$ differenzierbare Vektoren und bezeichnet C den Casimir-Operator von G, so genügt die Funktion $c_{v,w}(g) := \langle \pi(g)v, w\rangle$ der Differentialgleichung $Cc_{v,w} = c(\pi)c_{v,w}$

mit einem von π abhängigen Skalar $c(\pi)$. Für $K = SO(2)$ bezeichne $E(l) = \{ v \in E \mid \pi(e(\theta)) = e^{il\theta}v \}$, $l \in \mathbb{N}$. Wählt man $v \in E(m)$, $w \in E(n)$ und berechnet C in Koordinaten μ, x, ν (wobei $\begin{pmatrix} \cosh x \; e^{i(\mu+\nu)} & \sinh x \; e^{i(\mu-\nu)} \\ \sinh x \; e^{-i(\mu-\nu)} & \cosh x \; e^{-i(\mu+\nu)} \end{pmatrix}$ die Elemente von $SU(1,1)$),

so erhält man für $u_{m,n} := c_{v,w}$ in x eine Differentialgleichung, die bei der Transformation $u_{m,n}(y) = y^{1/2|m-n|}(1+y)^{-1/2(m+n)}v_{m,n}(y)$ in die hypergeometrische Differentialgleichung (mit geeigneten Parametern für $v_{m,n}(-y)$) übergeht. Dadurch erhält man Zusammenhänge zwischen Matrixkoeffizienten und speziellen Funktionen: hier den hypergeometrischen.

Im Anschluß daran wurde über die Weyl-Titchmarsh-Kodaira - Theorie der selbstadjungierten singulären Differentialoperatoren berichtet und skizziert, wie die zugehörigen Eigenfunktionentwicklungen zur Plancherel-Formel für $SL_2(\mathbb{R})$ führen.

D. Poguntke: Spuren irreduzibler Darstellungen von $SL_2(\mathbb{R})$

Es sei π eine (nicht notwendig unitäre) starkstetige, irreduzible Darstellung von $SL_2(\mathbb{R})$ in einem Hilbertraum. Für jedes $f \in C_c^\infty(SL_2(\mathbb{R}))$ ist dann $\pi(f)$, durch $\pi(f)v := \int_G f(x)\pi(x)v \, dx$ definiert, ein Spurklasse-Operator, und die Spur von $\pi(f)$ hängt nur von der infinitesimalen Äquivalenzklasse von π ab. Weiter ist $f \longmapsto \mathrm{Sp}\,\pi(f)$ eine Distribution auf $SL_2(\mathbb{R})$, und in der Tat eine Funktion, d.h. diese Distribution wird durch eine lokal integrierbare Funktion T_π dargestellt. Diese Tatsachen konnten in diesem Spezialfall mit elementaren Methoden eingesehen werden; die Funktionen T_π wurden explizit angegeben.

J. Gamst: Die Plancherel-Formel für $SL_2(\mathbb{R})$

Sei $f \in C_c^\infty(G)$, $G = SL_2(\mathbb{R})$; dann gilt die folgende Formel:

$$(*) \quad 2\pi f(1) = \sum_{n \neq 0} |n|\, S_n(f) + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty T_\lambda^+(f)\lambda \tanh\frac{\lambda\pi}{2}\, d\lambda$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^\infty T_\lambda^-(f)\lambda \coth\frac{\lambda\pi}{2}\, d\lambda \quad ;$$

dabei bezeichnet S_n die Spur einer diskreten Seriendarstellung vom Gewicht $m = n+1$ für $n > o$ bzw. $m = n - 1$ für $n < o$; T_λ^+ bzw. T_λ^- die Spur einer Darstellung in der geraden bzw. ungeraden Hauptserie zum Index $s = i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Die komplementäre Serie liefert keinen Beitrag. Durch geeignete Wahl eines Maßes $d\alpha$ (Plancherel-Maß genannt) auf der Menge $\hat{G}$ der Isomorphieklassen von unitären Darstellungen von G kann (*) geschrieben werden in der Form:

$$f(1) = \int_{\hat{G}} Sp\pi(f)\, d\alpha(\pi) \quad .$$

Es wurde eine Beweismethode von Harish-Chandra skizziert.

F. Lorenz: Hauptseriendarstellungen für $GL_2(F)$, F nicht-archimedischer lokalkompakter Körper

Man nennt eine Darstellung π von $G = GL_2(F)$ auf einem komplexen Vektorraum V zulässig, wenn der Stabilisator in G eines jeden $v \in V$ eine offene Untergruppe der maximal kompakten Untergruppe $K = GL_2(\mathcal{O}_F)$ ist, und für jede offene kompakte Untergruppe U der Raum V^U der Fixelemente unter U endlich-dimensional ist. Es wurden für zwei Quasicharaktere μ_1, μ_2

von F^* die induzierten Darstellungen (Hauptserie genannt)

$$PS(\mu_1,\mu_2) = \Big\{ f: G \longrightarrow C \text{ lokal konstant}, \quad f\left(\begin{pmatrix} t_1 & * \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} g\right) = \mu_1(t_1)\mu_2(t_2) \left|\frac{t_1}{t_2}\right|^{1/2} f(g), \quad t_1, t_2 \in F^* \Big\}$$

eingeführt und deren Reduzibilitätsverhalten studiert. Die Diskussion des Klassifikationsproblems ergab dann, daß jede irreduzible zulässige Darstellung π von G eine Unterdarstellung einer Hauptseriendarstellung ist, es sei denn, daß π eine sogenannte supercuspidale Darstellung ist. Diese sind durch die Tatsache charakterisiert, daß ihre Matrixkoeffizienten kompakten Träger haben (modulo dem Zentrum von G).

G. Frey: <u>Supercuspidale Darstellungen für</u> $GL_2(F)$

Mit Hilfe des Kirillov-Modells von irreduziblen zulässigen Darstellungen von $GL_2(F)$ wurden einige Eigenschaften supercuspidaler Darstellungen hergeleitet. Eine Konstruktion von supercuspidalen Darstellungen kann unter Verwendung von irreduziblen endlichdimensionalen Darstellungen der multiplikativen Gruppe der Quaternionenalgebra über F bzw. von quadratischen Erweiterungskörpern von F mit Hilfe der Weil - Darstellung durchgeführt werden.

H. Helling: <u>Darstellungen von</u> $GL_2(\mathbb{A})$ <u>und automorphe Formen</u>

Die (lokalkompakte topologische) Gruppe $G(\mathbb{A}) = GL_2(\mathbb{A})$ über dem Adelering $\mathbb{A}$ von $\mathbb{Q}$ wird in $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ durch die Vorschrift $f(-) \longrightarrow f(-g)$ $(g \in G(\mathbb{A}))$ unitär dargestellt. Fouriertransformation bezüglich der Idelklassengruppe $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$

erlaubt eine Auffassung von $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ als direktes Integral $\int L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}),\varphi)\, d\varphi$. $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}),\varphi)$ zerfällt in den Raum der Spitzenformen und dessen orthogonales Komplement. Dann wurde gezeigt: 1) Der Raum $L_o^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}),\varphi)$ der Spitzenformen ist Hilbertraumsumme von irreduziblen unitären $G(\mathbb{A})$ - Moduln mit Vielfachheit Eins; 2) Die in $L_o^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}),\varphi)$ auftretenden irreduziblen Darstellungen können durch automorphe Formen zu Gruppen $\Gamma_o(N)$ gekennzeichnet werden.
Die Multiplizität-Eins-Aussage bedeutet dabei die Tatsache, daß automorphe Formen, die Neuformen sind, durch Angabe fast aller ihrer Eigenwerte unter den Hecke-Operatoren festgelegt werden.

J. Mennicke: <u>Zeta-Funktionen</u>

Berichtet wurde, in Vorbereitung des Vortrages von F. Grunewald, über klassische Zeta-Funktionen und über Zeta-Funktionen zu Spitzenformen $f \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$. Die Zuordnung von Zeta-Funktionen zu Spitzenformen geschieht mit Hilfe der Mellin-Transformation. Es wurde die Version der Mellin-Transformation in der Adelesprache angegeben, die die Zeta-Funktionen für Darstellungen der $GL_2(\mathbb{A})$ mit Hilfe des Whittaker - Modells vorbereitet.

F. Grunewald: <u>Weil - Vermutung und Darstellungen für</u> $GL_2(\mathbb{A})$

Einer irreduziblen zulässigen (unendlichdimensionalen) Darstellung π von $GL_2(k)$, $k = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$, wurde mit Hilfe des Whittaker-

Modells eine lokale Zeta-Funktion in Abhängigkeit von einem komplexen Parameter s zugeordnet. Sie besitzt eine analytische Fortsetzung auf die ganze komplexe Ebene und genügt einer Funktionalgleichung. Die hierbei auftretenden, π zugeordneten lokalen Euler - und ε - Faktoren wurden angegeben.

Dann wurde global eine darstellungstheoretische Formulierung der Weil - Vermutung gegeben, die eine Korrespondenz zwischen der Hasse - Weil - Zeta-Funktion einer elliptischen Kurve E über $\mathbb{Q}$ und der globalen Zeta-Funktion zu gewissen Darstellungen von $GL_2(\mathbb{A})$ herstellt, die in $L_o^2(GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}))$ vorkommen.

Die Tagung schloß mit einem Ad-hoc - Vortrag von G. Harder zur "Langlands - Philosophie".

J. Schwermer (Bonn)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft