MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 14/1978

Mathematische Logik

2.4. bis 8.4. 1978

Unter der Leitung von E.Specker (Zürich) und W.Felscher (Tübingen) fand in der Woche vom 2.4. bis 8.4. 1978 im Forschungsinstitut in Oberwolfach die diesjährige Tagung über Mathematische Logik statt. Es wurden 30 Vorträge über verschiedene Gebiete der Mathematischen Logik gehalten.

Teilhehmer

S.Aanderaa, Oslo
E.Börger, Münster
W.Buchholz, München
H.G.Carstens, Bielefeld
E.Casari, Firenze
R.Deissler, Freiburg
M.Deutsch, Bremen
M.A.Dickmann, Paris
J.Diller, Münster
P.D.van den Dries, Utrecht
J.Y.Girard, Paris
H.Hermes, Freiburg
V.Huber-Dyson, Coventry
G.Jäger, München
H.R.Jervell, Tromsö
P.Krauss, Kassel
H.Läuchli, Zürich
H.Luckhardt, Frankfurt
W.Maass, München
R.McKenzie, Zürich
G.H.Müller, Heidelberg
A.Oberschelp, Kiel
P.Päppinghaus, Hannover
H.Pfeiffer, Hannover
W.Pohlers, München
L.Priese, Dortmund
W.Rautenberg, Berlin
M.M.Richter, Aachen
M.von Rimscha, Stuttgart
P.H.Schmitt, Heidelberg
W.Schönfeld, Stuttgart
J.Schulte Mönting, Tübingen
W.Schwabhäuser, Stuttgart
H.Schwichtenberg, Heidelberg
D.Siefkes, Berlin
A.Sochor, Praha
K.Steffens, Hannover
W.Thomas, Freiburg
A.S.Troelstra, Amsterdam
H.Volger, Tübingen
M.Zbierski, Warszawa
J.Zucker, Utrecht

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

S.AANDERAA: The Horn complexity of Boolean functions and Cook's problem

We use Horn formulas to define a new measure of complexity for n'ary Boolean functions, called the Horn complexity.
The reason why we have introduced the concept Horn complexity is that we want to develope tools to study Cook's problem (i.e. whether P = NP or not).
The Horn complexity is compared with the Turing machine complexity and network complexity.

E.BÖRGER: Decision Problems for Extended Presburger and Skolem Arithmetic (together with H.Kleine Büning)

We show that the decision problem for the class C_0 of all closed universal Horn formulae in prenex conjunctive normal form of extended Skolem arithmetic without equality (i.e. first order formulae built up from the multiplication sign, constants for the natural numbers and free occuring symbols) is polynomially equivalent to the reachability problem for Petri nets - and therefore recursive following Sacerdote/Tenney (1977) - if restricted to the class of formulae with a) only monadic predicate symbols, with b) only binary disjunctions in the quantifier free matrix and c) without terms containing a variable more than once. We show that this result is optimal in the sense that leaving out one of the restrictions a) to c) yields classes of formulae whose decision problem can assume any prescribed recursively enumerable complexity in terms of many-one degrees of unsolvability. As corollary we obtain a lower bound for the complexity of any decision procedure for C_0, namely that the decision problem for the subclass S_0 of all formulae in C_0 of form

$$\bigwedge_{x} (Qa \wedge \neg Qb \wedge \bigwedge_{i \leq r} (Qc_i x \rightarrow Qd_i x))$$

- where Q denotes a monadic predicate symbol and a, b, c_i, d_i, r are positive natural numbers - is polynomially equivalent to that of C_0 and requires exponential space. The proofs are such that similar results are obtained also for the Presburger arithmetic.

H.-G.CARSTENS: Existentiell abgeschlossene planare Graphen sind elementar äquivalent

Dieser Sachverhalt wird mit Hilfe eines Ehrenfeuchtspiels bewiesen.

R.DEISSLER: Tall models and Vaught's conjecture

For $\varphi \in L_{\omega_1\omega}$ $m(\varphi)$ denotes the number of countable isomorphism types of models of φ. Vaught's conjecture (VC) says: For all $\varphi \in L_{\omega_1\omega}$, $m(\varphi) \leq \aleph_0$ or $m(\varphi) = 2^{\aleph_0}$. VC has been neither proved nor disproved up to now. G.Sacks has shown that if φ is a counter-example to VC, then φ has a countable model $\mathfrak{M}$ whose Scott rank is $>\omega$ and equals the first ordinal not recursive in $\mathfrak{M}$. Such models are called tall. In this talk it is shown that if φ violates VC and $\mathfrak{M}$ is a tall model of φ with some additional (technical) properties, then $\mathfrak{M}$ has a proper $L_{\infty\omega}$ elementary submodel. As a corollary we get that if all countable models of same formula $\varphi \in L_{\omega_1\omega}$ do not contain proper $L_{\infty\omega}$ elementary submodels, then for this formula VC holds. This generalizes a theorem of Sacks, Nadel, Harnik, Makkai.

M.A.DICKMANN: Two strongly undecidable classes of algebraic theories

We consider the interpretability of (first and) second order arithmetic in algebraic theories of two different types:

1) The first group of results - due to Delon, 1977 - concerns rings of the following types:

- $k[[x_1,\dots,x_m]]$ $(= k[[\overline{x}]])$, the ring of formal power series in $\underline{m \geq 2}$ indeterminates over a field k.
- $N_k(\overline{x})$, the ring of elements of $k[[\overline{x}]]$ algebraic over $k[\overline{x}]$ $(\underline{m \geq 2})$.
- (whenever $k \subseteq \mathbb{C}$) $k\{\overline{x}\}$ the ring of elements of $k[[\overline{x}]]$ with convergence radius >0 in the usual topology of the complex $\mathbb{C}$ $(\underline{m \geq 2})$.

Theorem 1 (A) If char(k) = o, then:

(i) the standard model of first order arithmetic can be defined without parameters in each of the preceding rings.

(ii) the standard model of second order arithmetic can be defined with parameter x_1 in $k[[\overline{x}]]$ and $k\{\overline{x}\}$.

(B) If char(k) $\neq$ o and $m \geq 3$, then the standard model of first order arithmetic can be defined in $k[[\overline{x}]]$ with parameters x_1, x_3, and the standard model of <u>second order</u> arithmetic can be defined in $k[[\overline{x}]]$ with parameters x_1, x_2, x_3.

<u>Corollary</u>. (A) If char(k) = o, then

(i) the theory of each of the above rings is undecidable,

(ii) no two of the above rings are elementarily equivalent.

(B) If char(k) $\neq$ o and $m \geq 3$, then the theory of $k[[\overline{x}]]$ is undecidable and $N_k(\overline{x}) \nprec k[[\overline{x}]]$.

<u>Proposition 2</u>. (A) Let char(k) = o and k_0 the subfield of elements of k algebraic over $\mathbb{Q}$. If $k \neq k_0$, then $k[[\overline{x}]] \not\equiv k_0[[\overline{x}]]$.

In particular:

(B) If L, $\tilde{\mathbb{Q}}$ denote respectively the fields of real and complex algebraic numbers and $\mathbb{R}$: the field of real numbers, then $\tilde{\mathbb{Q}}[[\overline{x}]] \not\equiv \mathbb{C}[[\overline{x}]]$ and $\mathbb{R}[[\overline{x}]] \not\equiv L[[\overline{x}]]$.

(C) Let M be either (i) a non-archimedian real field, or (ii) a real-closed field not containing one (arbitrary) real which is the limit of a sequence of rationals definable in $\mathbb{R}[[x_1]]$. If $m \geq 2$, then $M[[\overline{x}]] \not\equiv \mathbb{R}[[\overline{x}]]$.

These results show, in different ways, that rings of formal power series in <u>at least 2 indeterminates</u> have properties diametrically opposed to those in 1 indeterminate (the last as derived from the work of Ax-Kochen).

2) The second type of results - due to Jambu, 1978 - concern the <u>lattice-ordered</u> (or just <u>ordered</u>) <u>groups</u> of automorphisms and of bounded automorphisms of the order structures R (the set of reals) and Q (the set of rationals) with their natural order. They are denoted Aut(R), Aut(Q), Baut(R), Baut(Q), respectively.

<u>Theorem 3</u>. (A) The standard model of <u>second order</u> arithmetic is definable without parameters in each of the preceding lattice-ordered (or ordered) groups. Hence these are undecidable.

(B) No two of the above structures are elementarily equivalent.

J.DILLER: <u>Functional interpretations</u>

Etliche Funktional-Interpretationen sind Übersetzungen

$I : B \longmapsto B^I \equiv \exists v \forall w\, B_I$, für die ein Interpretationssatz gilt: Aus $\vdash B$ folgt $\vdash B_I[v_o, w]$ für geeignete Terme v_o. Betrachtung eines Beweises von $C^I \equiv \exists y \forall z\, C_I$ aus B^I führt zu der Definition $(B \rightarrow C)^I \equiv \exists Y, W\, \forall v, z\, (\Lambda w \in Wvz\, B_I \rightarrow C_I[Yv, z])$. B^I ist dann stets eine Formel einer Heyting-Arithmetik endlicher Typen $HA^\omega_\in$ mit beschränktem Allquantor $\Lambda u \in a$ und Mengentermen. Diese Theorie läßt sich in ihrem quantorenfreien Fragment $T_\in$ interpretieren, und das Schema $A \leftrightarrow A^I$ ist äquivalent zu Axiomen AC, $IP_\in$, $M_\in$ (Rath 1978). Spezialfälle von I erhält man durch Festlegung der Beschränkung $\Lambda u^\tau \in W$:

1. Ist W stets das Universum vom Typ τ, so ist I äquivalent zur modifizierten Realisation mr von Kreisel 1959; $HA^\omega_\in$ erweist sich zugleich als konservativ über HA^ω.
2. Ist W stets endlich aufgezählt, so ist I äquivalent zur $\wedge$-Interpretation vom Verf. und Nahm 1974 und HA^ω_o äquivalent zur Dialectica-Interpretation D von Gödel 1958.
3. Ist W das Universum vom Typ n-1 für grad $\tau \geq n > o$, sonst das vom Typ τ, so ist I äquivalent zur n-Interpretation von Stein 1977.

Allgemein läßt sich I fortsetzen auf die intuitionistische Analysis, aber nur für $I = \wedge$ (und $I = D$) auf die klassische Analysis.

L.VAN DEN DRIES: Bounds in the theory of polynomial ideals

G.Hermann solved in "Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale" (Mathematische Annalen,1926) a great number of construction problems for polynomial ideals over a field K, for instance:

1. How does one effectively determine whether an ideal $(f_1,\ldots,f_k) \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ contains 1, is maximal, prime,primary?
2. How does one effectively compute the minimal primes, the radical, a primary decomposition of a given ideal $(f_1,\ldots,f_k) \subset K[x_1,\ldots,x_n]$?

Her proofs were rather complicated. In the fifties Robinson gave a simple model theoretic proof for the following: given a bound d on the degrees of $f_1,\ldots,f_k$, one can compute an $R \in \mathbb{N}$, depending only on n and d such that $1 \in (f_1,\ldots,f_k) \leftrightarrow 1 = \Sigma\, h_i f_i$ for polynomials of degree $\leq R$, thus giving an alternative solution for one of the problems considered by Hermann. In 1977 and 1978 I extended Robinson's technique to all the problems solved by Hermann. Some examples of this were given in the talk.

J.Y.GIRARD: Some results on ordinal notations

This is a simplified version of the results announced under the name "flowers and gardens".

1) A *totalizator* is a functor from the category of ordinals into itself, and commuting to direct limits (and satisfying to additional requirements)

2) Given a totalizator, it is possible to define a family (B_μ) of Bachmann collections of type μ. Such a family is called a *ladder*.

3) Ladders and totalizators may be used to reformulate the familiar hierarchies of the litterature such that the Bachmann hierarchy... The construction can of course be continued farther along, and to go quickly outsides any known bound.

4) The typical example of use of these notions is given by function Λ: this function has the property that $g_{\Lambda\alpha} = h_\alpha$, where g and h are two hierarchies of recursive functions. This solves this problem of comparing these two hierarchies.

5) The program of work is to use the construction to find the "ordinals" of various theories.

V.HUBER-DYSON: Endlich erzeugte Gruppen mit rekursiv aufzählbarer Existenztheorie brauchen kein lösbares Wortproblem zu haben

Ein Kriterium für die Einbettbarkeit einer Gruppe in ein Modell der Theorie der endlichen Gruppen wird aufgestellt und dazu benutzt, eine Frage von Macintyre zu beantworten: Die Gruppe aller Permutationen endlichen Supports auf der Menge der ganzen Zahlen erweitert durch die Nachfolgeroperation erfüllt diese Bedingung. Somit besteht ihre Existentialtheorie genau aus den in endlichen Gruppen erfüllbaren Systemen von Gleichungen und Ungleichungen, und ist also rekursiv aufzählbar. An diesem Zustand ändert direkte Produktbildung mit einer residuell endlichen, endlich erzeugten Gruppe unlösbaren Wortproblems nichts. Jedoch wird damit eine Gruppe mit unlösbarem Wortproblem geliefert. Da für endlich präsentierte Gruppen die Lösbarkeit des Wortproblems mit der rekursiven Aufzählbarkeit des 'Gleichungsproblems' (cf. Macintyre) zusammenfällt, haben wir hier ein Beispiel wo sich endlich präsentierte Gruppen wesentlich besser benehmen als zwar endlich erzeugte aber unendlich verknüpfte.

G.JÄGER: Zur Beweistheorie von KPN

KPN ist eine Theorie der Mengenlehre mit den natürlichen Zahlen als Urelementen. Bis auf das Fundierungsschema, das durch das Fundierungsaxiom ersetzt wird, haben Barwise's KPU^{+} und KPN dieselben mengentheoretischen Axiome; als Theorie für die Urelemente wird die Zahlentheorie gewählt. Es wird gezeigt, daß $\varphi\varepsilon_0 0$ die beweistheoretische Ordinalzahl $|KPN|$ von KPN ist:

1. $|KPN| \geq \varphi\varepsilon_0 0$ durch Einbettung von $(\Delta^1_1\text{-CA})$ in KPN.
2. $|KPN| \leq \varphi\varepsilon_0 0$ durch Interpretation von KPN bezüglich seiner Σ-Formeln in einem geschichteten System der Mengenlehre mit Schichten $<\varepsilon_0$ und Schnittelimination.

H.R.JERVELL: Normalization and the direct proof

We work in Martin-Löf's theory of types without universes. Three natural concepts are introduced:

1. The order of a type
2. The length of a proof as a function of the length of the open assumptions
3. The order of evaluation of the cartesian products in the proof.

Theorem 1. The length of a proof is a polynomial. All conversions exept conversions of cartesian products lowers the asymptotic growth of the length.

The order of a type is defined such that

$$\mathrm{order}((\Pi x \in A)B[x]) = \max(1+\mathrm{order}A, \mathrm{order}\, B[x])$$

$$\mathrm{order}(N) = \mathrm{order}(N_k) = 0$$

Theorem 2. The evaluation order of the cartesian products in a proof where the types are of order $\leq\kappa$ is given by ordinals

$$< \left.\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}\right\}\kappa+1 .$$

Theorem 3. The normalform theorem with the best possible ordinal bounds for subsystems of order $\leq\kappa$.

H.LUCKHARDT: <u>Skolem functors</u>

Let ISF denote the usual rule introducing extensional Skolem functors and ISF! its strengthening by uniqueness condition. Then the following results are proved.

1. ISF and ISF! are in general false for classical and intuitionistic theories of order $\geqslant 2$.

2. ISF is conservative for a first order logic i+E (i.e. ISF is conservative for all theories over intuitionistic logic i plus E) iff E contains $u=v \vee u \neq v$.

3. In the first order case there is an infinite axiomatization of the Skolem functor free consequences of n *simultaneous Skolem functors* with the axioms $\bigwedge \underline{\underline{x}}_1 \ldots \underline{\underline{x}}_n R(\underline{\underline{x}}_1, \Phi_1 \underline{\underline{x}}_1; \ldots; \underline{\underline{x}}_n, \Phi_n \underline{\underline{x}}_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge \underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}} (\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{y}} \rightarrow \Phi_i \underline{\underline{x}} = \Phi_i \underline{\underline{y}})$.

The proofs for 2. and 3. are based on a new direct treatment of Skolem functors: in a Gentzen system the given proof is first transformed into a normal form, which puts the premises concerning the Skolem functors at those places, where they are actually necessary; then an elimination algorithm is applied to them.

W.MAASS: <u>The Uniform Regular Set Theorem in α-Recursion Theory</u>

In α-recursion theory a set $A \subseteq \alpha$ is called regular (over α) if $A \cap \gamma \in L_\alpha$ for every $\gamma < \alpha$. The question concerning the possible α-degrees of regular sets is part of the program to determine the relationships between the extensional structure of a set and its α-degree (i.e. the information that is contained in the set).
As in Jensen's fine structure theory of L - where one calls $\langle L_\alpha, A \rangle$ amenable if A is regular over α - the notion of regularity is essential for many constructions in α-recursion theory. The following Theorem solves a problem which was raised by G.E.Sacks (question Q7 in Post's problem, admissible ordinals and regularity, Trans.Am.Math.Society, vol.124 (1966)).
Theorem: There is an α-recursive (i.e. $\Delta_1\ L_\alpha$) function $f: \alpha \longrightarrow \alpha$ such that for every $e \in \alpha$ the α-recursively enumerable (i.e. $\Sigma_1\ L_\alpha$) set with index f(e) is regular and of the same α-degree as the α-recursively enumerable set with index e.

P.PÄPPINGHAUS: Vollständigkeit in der Typentheorie

Es wird ein schnittfreier Sequenzenkalkül für die klassische (einfache) Typentheorie angegeben, der vollständig, aber im allgemeinen nicht korrekt ist bzgl. der intendierten Interpretation der Quantoren höherer Stufen. (Dies ist im wesentlichen eine Umformulierung von Ergebnissen von Girard und Takahashi.) Aufgrund der Teilformeleigenschaften dieses Kalküls kann man aber ein nichttriviales Fragment der typentheoretischen Sprache angeben, für das der Kalkül auch korrekt ist. Genauer: Wir betrachten für $2 \leq n \leq \omega$ Sprachen, die für jedes $i < n$ Konstante und Variablen des Typs i enthalten, über die quantifiziert werden darf. Die Variablen des Typs $i+1$ rangieren über die Potenzmenge des Objektbereichs der Variablen vom Typ i. Im Formelaufbau verwendet man auch Abstraktionsterme in folgender Weise: Ist α^{i+2} eine Konstante oder freie Variable des Typs $i+2$ und $A(a^i)$ eine Formel, so ist $\{x^i | A(x^i)\} \in \alpha^{i+2}$ eine Primformel. Eine Formel heißt Π^n, wenn ihre Abstraktionsterme keine Quantoren höherer Typen enthalten, und das Präfix ihrer pränexen Normalform nur Allquantoren höherer Typen enthält. Das oben erwähnte Ergebnis besagt nun Korrektheit und Vollständigkeit des Kalküls bzgl. der intehdierten Interpretation für Π^n-Sätze.

W.POHLERS: Das Spektrum einer formalen Theorie

Als Standardmodelle für die formale Theorie ID_ν ν-fach iterierter induktiver Definitionen bieten sich die Strukturen

$\mathcal{N}_\xi = (\mathbb{N}, \{Q : \exists\eta < \xi \text{ (Q induktiv über } \mathcal{N}_\eta)\})$ an. Jede der Konstanten P^φ_ξ wird dann als eine über $\mathcal{N}_\xi$ induktive Menge interpretiert. Als das Spektrum von ID_ν definieren wir die Normen der in ID_ν beweisbaren Elemente induktiver Mengen, d.h. $Sp(ID_\nu) = \{|n|^\varphi_\xi : ID_\nu \vdash n \in P^\varphi_\xi\}$. Für eine Teiltheorie $ID_\nu(\omega)$ von ID_ν gelingt es das Spektrum vollständig zu beschreiben.

L.PRIESE: Thue Systeme mit 2 Regeln und andere einfache universelle Kalküle

In der Literatur werden fast ausschließlich Kalküle untersucht, die auf linearen Zeichenreihen arbeiten. Hier sollen einige 2-dim. Kalküle vorgestellt werden, die trotz überraschender Einfachheit

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

universell sind. Dabei wird gezeigt:

I) Es existiert ein 2-dim. Thue-System, T, mit 2 Regeln und unentscheidbarem Wortproblem. Dabei benutzt T nur die beiden einfachen Regeln: xaaaaaa = aaaaaax , xmaaaaa = axaaama. T operiert nur auf endlichen Zeichenreihen des Z^2, d.h. nur auf 2-dim. Wörtern mit endlich vielen Buchstaben ungleich a (=blank-Symbol).

II) Es wird eine universelle 2-dimensionale TURING-Maschine mit nur 2 Zuständen und 4 Buchstaben vorgestellt. Sie benutzt die Maschinentafelzeilen: (Zustand,Buchstabe→Buchstabe,Zustand,Richtung) 1,a→a,1,l ; 2,a→a,2,r ; 1,c→c,2,u ; 2,c→e,1,u ; 1,e→e,2,o ; 2,e→c,1,o ; 1,*→*,1,u ; 2,*→a,1,o . Da 2 Zustände und 2 Buchstaben nicht-universell sind, bleibt nur der 2-Zustände-3-Buchstaben-Fall offen.

W.RAUTENBERG: Some recent results in modal and tense logic

The main concern of the investigation is a close inspection of the lattice N of all normal modal logics and the lattice N_t of all normal tense logics. Some general properties of this lattice are shown to hold, e.g. N is relatively pseudocomplemented and hence distributive. The main result is the existence of splittings of various sublattices of N. The results have been established partly in a 1977 paper in Mathematische Zeitschrift, and in the Bull. of Section Logic, both from the autor.

M.v.RIMSCHA: Mengentheoretische Modelle für den λK-Kalkül

Ausgangspunkt ist eine Mengenlehre, die aus ZFC dadurch entsteht, daß wir auf das Fundierungsaxiom verzichten und stattdessen das folgende Universalitätsaxiom *U1* fordern: "Zu jeder extensionalen Relation R, die Menge ist, existiert eine transitive Menge u, sodaß R isomorph zu $\varepsilon \cap u^2$ ist".

In einer solchen Mengenlehre lassen sich mengentheoretische Modelle des extensionalen λK-Kalküls konstruieren; d.h. Modelle, in denen die Terme des λK-Kalküls keine "doppelte Bedeutung" haben sollen (einerseits Argument, andererseits Funktion), sondern als ganz gewöhnliche Funktionen (Mengen von geordneten Paaren) interpretiert werden.

Es sind auch mengentheoretische Modelle des nichtextensionalen λK-Kalküls möglich; die Terme sind dann durch geordnete Paare aus einer Funktion und einem Unterscheidungsindex zu interpretieren.

P.H.SCHMITT: Classification of all complete L^t-theories of linear topologies on the additive group of rationals

For reference on the language L^t see: M.Ziegler, Bull.AMS 82 (1976).
Let $\mathcal{M}$ be the class of all topological groups (G,U) such that there is a linear topology V such that $(G,U) \equiv^t (\mathbb{Q},V)$, where $\mathbb{Q}$ is the additive group of rationals.

1. $Th^t(\mathcal{M})$ is decidable.
2. A classification of all complete (in L^t) extensions of $Th^t(\mathcal{M})$ has been obtained.
3. It has been determined which of the extensions in 2. have a model $(\mathbb{Q},U)$ with U a linear topology.

W.SCHÖNFELD: Lösbarkeit von Relationengleichungen

Relationengleichungen sind formale Ausdrücke der Form $s = t$, wobei s und t aus Variablen für binäre Relationen auf einer endlichen Menge U und aus Konstanten für die leere, die universelle und die identische Relation mit Hilfe von Operationssymbolen für Vereinigung, Durchschnitt und Produkt von Relationen aufgebaut sind. Ein System α von Relationengleichungen *stellt* ein Prädikat $K \subseteq \mathbb{N}^m$ *spektral dar*, falls für alle $n_1,\dots,n_m \in \mathbb{N}$:

$$Kn_1\dots n_m \quad \text{g.d.w.} \quad \text{es gibt } U \text{ und } X_1,\dots,X_m \subseteq U\times U \text{ mit } |X_\mu| = n_\mu,$$
$$\text{so daß } \alpha(X_1,\dots,X_m) \text{ in } \wp(U\times U) \text{ lösbar ist.}$$

Satz: Jedes diophantische Prädikat ist spektral darstellbar durch ein endliches System von Relationengleichungen.

Da jedes rekursiv aufzählbare Prädikat diophantisch ist, folgt

Satz: Die Menge aller über endlichen Bereichen lösbaren endlichen Systeme von Relationengleichungen ist nicht rekursiv.

H.SCHWICHTENBERG: Konservative Erweiterungen der Arithmetik

Es wird gezeigt, daß E-HA$^{\omega}$ + AC$_0$. + AC! konservativ über HA ist. Dies folgt auch aus Resultaten von Beeson 1976 und Troelstra 1977; jedoch ist der hier gegebene Beweis direkter (er verwendet nur

Schnittelimination) und er scheint für eventuelle Anwendungen und Verschärfungen geeigneter zu sein.

D.SIEFKES: Algorithmic cost of finite and infinite problems

An algorithm is *organizational over the basis* B (set of function symbols), if at input $x \in \Sigma^*$ it produces a B-term A_x (organization) and computes $A_x(x)$ (computation); more general: if at input $x \in \Sigma^*$ it produces B-terms A_x^1, A_x^2 and elements $y_1,\dots,y_m \in \Sigma^*$ and computes $A_x^2(A_x^1(y_1),\dots,A_x^1(y_m))$. The cost of such an algorithm sums up from organizational cost and computing cost. Many practical algorithms can be represented in this way. We consider: bit-wise integer addition, matrix multiplication, satisfiability of Boolean formulas (deterministic and non-deterministic), finding the nearest pair, and primality (both probabilistic). The concept might help to connect the theories of complexity of finite and of infinite problems. We mention analogies in the probabilistic case to new ideas in the organization of large information systems and complicated social structures. (Together with K.Fleischmann.)

A.SOCHOR: Is the $\varepsilon - \delta$ analysis strong enough?

Nonstandard analysis gives us suitable framework for the development of the idea of "infinitely small quantities" and moreover it also enables us to investigate the problem whether $\varepsilon - \delta$ calculus is equal to express all properties which are expressible in Leibniz's calculus. P.Vopěnka showed that every formula of Leibniz's analysis which has at most two quantifiers for infinitely small quantities can be expressed in $\varepsilon - \delta$ calculus.

On the other hand we can construct a property of (standard) real functions which can be formulated in terms of Leibniz's calculus and cannot be expressed in $\varepsilon - \delta$ calculus. Therefore $\varepsilon - \delta$ analysis seams in some sense weaker than Leibniz's calculus.

K.STEFFENS: Bemerkungen zur Kombinatorischen Mengenlehre

Frage 1 Ist Fodor's Theorem über regressive Funktionen auch für partielle Wohlordnungen richtig?

Frage 2 Es sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur einer Sprache 1-ter Stufe mit

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

höchstens abzählbar vielen abzählbar unendlichen Orbits. Ist dann $|\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})| \leq \aleph_0$ oder $|\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})| = 2^\kappa$ für eine unendliche Kardinalzahl κ? Frage 2 wird bejaht, Frage 1 verneint. Es zeigt sich, daß trotz der Verneinung der 1-ten Frage, der Solovay'sche Zerlegungssatz für stationäre Teilmengen von Kardinalzahlen auch für geeignete partielle Wohlordnungen richtig ist.

W.THOMAS: Die schwache und starke monadische Theorie einer Wohlordnung

Ist $(\alpha,<,\ldots)$ eine wohlgeordnete Struktur, so sei $MT(\alpha,<,\ldots)$ (bzw. $WMT(\alpha,<,\ldots)$ bzw. $BMT(\alpha,<,\ldots)$) die starke (bzw. schwache bzw. beschränkte) monadische Theorie 2.Stufe von $(\alpha,<,\ldots)$, in der die quantifizierten Variablen 2.Stufe über alle (bzw. die endlichen bzw. die beschränkten) Teilmengen von α rangieren. Es wird eine Frage von Büchi/Landweber (JSL 1969) beantwortet,nämlich: "Gibt es ein $P \subset \omega$, sodaß $WMT(\omega,<,P)$ entscheidbar und $MT(\omega,<,P)$ unentscheidbar ist?" Wie der folgende Satz zeigt, gibt es kein derartiges P:
Satz: Für jede Struktur $(\alpha,<,\overline{P})$ mit $\overline{P} = (P_1,\ldots,P_k)$ (wobei $P_i \subset \alpha$) gilt: Sind $BMT(\alpha,<,\overline{P})$ und $MT(cf(\alpha),<)$ entscheidbar, so ist $MT(\alpha,<,\overline{P})$ entscheidbar.
Ferner wird gezeigt, daß in $BMT(\alpha,<,\overline{P})$ und $MT(\alpha,<,\overline{P})$ dieselben Klassen von Teilmengen von α definierbar sind.

A.S.TROELSTRA: Extended bar induction of type 0

It is shown that the following schema of extended bar induction

$$EBI_0(A) \quad [\forall\alpha \in A^{\omega}\ \exists x P\overline{\alpha}x \wedge \forall n \in A^{<\omega}\ \forall x \in A\ (Pn \to P(n*\hat{x})) \wedge$$
$$\wedge \forall n \in A^{<\omega}\ (\forall x \in A\ \ P(n*\hat{x}) \to Pn)] \to P\langle\rangle$$

(where Ax is a numerical predicate of elementary analysis, possibly containing numerical parameters, and $n \in A^{<\omega} \equiv \forall x<lth(n)\ ((n)_x \in A)$, $\alpha \in A^{\omega} \equiv \forall x A(\alpha x)$) yields, when added to elementary intuitionistic analysis *EL*, a system which is proof-theoretically equivalent to the intuitionistic theory of finitely iterated monotone inductive definitions.

H.VOLGER: Preservation theorems for sheaves and limits

The following are equivalent for any theory T:

(1) T is invariant under global sections of sheaves of T-models.

(2) T is invariant under global elements of generalized Kripke-structures of T-models.

(3) T is invariant under limits i.e. equalizers and products.

(4) T is invariant under equalizers and T has models for finite consistent presentations.

(5) T can be axiomatized by sentences of the form $\forall\overline{x}(\beta(\overline{x}) \rightarrow \exists\overline{y}\ \alpha(\overline{x},\overline{y}))$ with β,α in $\wedge At$ and if

$T \vdash \forall\overline{x}\ (\beta(\overline{x}) \rightarrow \exists\overline{y}\ \alpha(\overline{x},\overline{y}))$ then there exists $\mu(\overline{x},\overline{y})$ in $\exists\wedge At$

such that $T \vdash \forall\overline{x}\ (\beta(\overline{x}) \rightarrow \exists\overline{y}(\alpha(\overline{x},\overline{y}) \wedge \mu(\overline{x},\overline{y}))$ and $T \vdash \forall\overline{x}\ \exists^{\leq 1}\overline{y}\ \mu(\overline{x},\overline{y})$.

(6) T has a definitorial extension T^* by predicates defined by formulas in $\exists\wedge At$ such that T^* can be axiomatized by sentences of the form $\forall\overline{x}\ (\beta(\overline{x}) \rightarrow \exists^{1}\overline{y}\ \alpha(\overline{x},\overline{y}))$.

Moreover, it can be shown that the invariance problem for theories cannot be reduced to the one for sentences, in general. More precisely, there is a theory T which is invariant under limits but which cannot be axiomatized by sentences which are invariant under limits. Thus T^* is different from T in this case.- In addition, for any countable effectivized language the set of sentences invariant under limits will be r.e. .

*) The equivalence of (1) and (5) solves a problem of Mansfield (JSL 42 (1971))

**) The equivalence of (3) and (5) was claimed by O.Keane in 1974.

P.ZBIERSKI: End elementary extensions of models of ZF (together with W.Marek).

Let $M = \langle M,\varepsilon\rangle$ and $M = \langle M^*,\varepsilon^*\rangle$ be models of ZF set theory. We say that M^* is an end extension of M iff $M \subseteq M^*$ and On^M - the ordinals of M - is an initial segment of the ordinals of M^*. In case of models of 1st order arithmetic, Mc Dowell and Specker showed, that every model has an elementary end extension. In case of models of ZF this is no longer true as shown by Keisler-Silver. They gave also a sufficient condition for a model to posses an elementary end extension. We give another sufficient condition which is in fact PC_Δ.

This involves expandability of a given model to a model for class theory with global choice and unary predicate denoting a On-complete normal ultrafilter over ordinals of the model. Then Mc Dowell-Specker construction works.

J.ZUCKER: Interpolation for fragments of propositional calculi

Let L be the usual language of the (first order) classical and intuitionist propositional calculi. Given a set of propositional connectives, the *fragment* of L corresponding to this set is the set of all formulas of L built up from these connectives only. Now any formula of L with *n* propositional parameters defines, in an obvious way, an *n*-ary propositional connective. Hence to any (finite) set of formulas of L there corresponds a fragment of L. It is known that the *interpolation theorem* holds for arbitrary fragments (in this sense) in the classical propositional calculus (F.Ville). We exhibit, by contrast, a fragment of L for which interpolation fails in the intuitionist propositional calculus.

Anhang: Vortrag außerhalb des offiziellen Tagungsprogramms:

E.BÖRGER: The r.e. complexity of decision problems for commutative semi-Thue systems with recursive rule set (together with H.Kleine Büning)

We show that word, halting and confluence problems of commutative semi-Thue systems with a recursive set of rules over a finite alphabet can assume independently of each other arbitrarily pre-scribed r.e. many-one degrees of unsolvability. This settles an open problem stated to us by Prof. W.W.Boone. The proof consists in an appropriate simulation of 2-register machines and is based on the corresponding theorem for those machines. In the case of semi-Thue systems with finite rule set we show that all decision problems considered above are many-one equivalent. Sacerdote/Tenney claim that the word problem is recursive for the finite case.

J.Schulte Mönting, Tübingen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft