MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 15 / 1978

Differentialgleichungen der mathematischen Physik

9.4. bis 15.4.1978

Gegenstand der Tagung waren Ergebnisse aus dem Bereich gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, die einen Bezug zu Fragestellungen und Methoden der mathematischen Physik aufweisen. Der Rahmen der im Mittelpunkt der Diskussion stehenden Ergebnisse und Probleme läßt sich in etwa mit folgenden Stichworten beschreiben:
Rand-Eigenwertprobleme, Behandlung spezieller Typen von Differentialgleichungen, Fortentwicklung der Theorie höherer spezieller Funktionen, Spektralsätze für spezielle Differentialoperatoren, Aussagen zum Spektralkern symmetrischer Erweiterungen sowie Multiparameter-Probleme.
Dabei kamen neben den weiterentwickelten klassischen Methoden vor allem solche aus dem Bereich der Funktionalanalysis zur Anwendung.

Die Tagung unter Leitung von Prof. Dr. F.W. Schäfke (Konstanz) und Prof. Dr. A. Schneider (Dortmund) wurde von 30 Teilnehmern besucht, von denen 10 aus dem Ausland kamen. Es wurden 20 - in der Regel 50-minütige - Referate gehalten.

Teilnehmer

Benzinger, H.	Urbana/Illinois
Browne, P.	Dundee
Dijksma, A.	Groningen
Eastham, M.S.P.	London
Eberhard, W.	Duisburg
Forst, W.	Dortmund

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Freiling, G.	Duisburg
Frentzen, H.	Essen
Hargrave, B.A.	London
Höhle, U.	Wuppertal
Jansen, J.K.M.	Eindhoven
Kaballo, W.	Dortmund
Meixner, J.	Aachen
Mendel, M.	Wuppertal
Mennicken, R.	Regensburg
Neckermann, L.	Würzburg
Nießen, H.-D.	Essen
Ronveaux, A.	Namur
Sagraloff, B.	Regensburg
Sattler, A.	Essen
Schäfke, R.	Essen
Schönhage, A.	Tübingen
Schultze, B.	Essen
Sips, R.	Brüssel
Sleeman, B.D.	Dundee
de Snoo, H.S.V.	Groningen
Vaupel, J.	Duisburg
Volkmer, H.	Konstanz
Wagenführer, E.	Regensburg
Wolf, G.	Essen

Vortragsauszüge

H.E. BENZINGER:

Perturbation of the Heat Equation

Consider a long, thin rod of finite length, whose ends are kept at a temperature of zero degrees. If the rod is perfectly insulated, the time evolution of temperature in the rod can be described using Fourier sine series. If the rod is imperfectly insulated, more complicated eigenfunction expansions must be used. It is natural to attempt to approximate the semigroup for the imperfectly insulated problem with the semigroup for the perfectly insulated one, at least for small values of time. We investigate the degree of approximatior for various norms, and show that in general the semigroup for the perfectly insulated problem is not the best "simple" approximation to the imperfectly insulated problem.

P. J. BROWNE:

Multiparameter Problems.

The lecture discusses some recent results concerning analytic perturbations in multiparameter eigenvalue problems.

M.S.P. EASTHAM:

Estimates of Liouville-Green type for higher-order differential equations.

A pointwise estimate for an arbitrary solution $Y(x)$ of the system

$$Y''(x) + P(x)Y'(x) + Q(x)Y(x) = 0 \quad (0 \leq x < \infty)$$

as $x \to \infty$ is given. Here P and Q are $n \times n$ matrix functions. In its original form this estimate is due to Kuptsov (Uspehki Mat. Nauk, 1963) and, in the case $n = 1$, it yields the standard Liouville-Green estimate. In the lecture, the problems involved in applying the general estimate to particular situations are discussed. An account is given of recent work in which the application to systems arising from higher-order equations has been carried out. Examples are:

(i) self-adjoint equations (including those whose coefficients are linear combinations of suitable powers of x) for which the estimate yields new results in spectral theory;

(ii) equations, whose coefficients involve a single given function q, the estimate $y(x) = O\{q^k(x)\}$ being obtained for all solutions y and a computable constant k, e.g.,

$$y^{(4)} + a(qy')' + (bq^2 + q'')y = 0$$

and

$$y^{(4)} + ay'' + bq'q^{-1}y' + y = 0$$

with constants a and b.

W. EBERHARD:

Stone-reguläre Eigenwertprobleme.

Es werden Eigenwertprobleme des Typs

(1) $\qquad M(y) = \lambda N(y)$

mit linearen Differentialausdrücken M,N von n-ter bzw. p-ter Ordnung ($n-1 \geq p \geq o$) und mit linear unabhängigen Randbedingungen

(2) $\qquad U_\nu(y) = 0 \qquad \nu=1,2,\dots,n$

über dem Intervall [o,1] untersucht. Mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung eines Fundamentalsystems von (1) und einer dadurch möglichen asymptotischen Entwicklung der charakteristischen Determinante von (1), (2) wird eine Klasse von EW-Problemen definiert, die "Stone-regulär" genannt wird. Es wird diskutiert, wie sich die bisher behandelten Fälle von Birkhoff, Stone, Hromov und Benzinger (Fall Ny = y) sowie die von E.und Freiling (P-regulärer Fall bei p>o) in die Theorie der allgemeinen Stone-regulären Probleme einordnen lassen. Für die Eigenwerte werden asymptotische Abschätzungen bewiesen.

G. FREILING:

Mehrpunkteigenwertprobleme.

Für Eigenwertprobleme vom Typ

$$y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} f_j(X)y^{(n-j)} = \lambda\left[y^{(p)} + \sum_{j=1}^{p} g_j(x)y^{(p-j)}\right] \qquad (n>p\geq o)$$

$$U_\nu(y) := \sum_{j=o}^{h} U_{\nu_j}(y(a_j)) + \int_0^1 u_\nu(x)y(x,\cdot)dx = o$$

$$1 \leq \nu \leq n, \quad o=a_o<a_1<\dots<a_h=1$$

wird der Begriff "Stone-regulär" definiert, der es erlaubt, die für Zweipunkteigenwertprobleme entwickelte Theorie für Birhoff- und Stone-reguläre EWP (siehe Vortrag Eberhard) in eine allgemeinere Theorie einzuordnen.

Es wird gezeigt, daß für eine Teilklasse dieser EWP die Bilinearentwicklung der Greenschen Funktion konvergiert und daß sich jedes $f \in C^n[0,1]$ mit $U_\nu(f) = o$, $1 \leq \nu \leq n$ in eine auf [o,1] gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen dieser EWP bzw. der adjungierten EWP entwickeln läßt.

Für eine in $L_q[0,1]$ $(1<q<\infty)$ dichte Klasse von summierbaren Funktionen konvergieren die betrachteten Reihenentwicklungen bzgl. der Norm in L_q und verhalten sich für $x\in[0,1]\setminus\{a_0,a_1,\dots a_h\}$ bzgl. Rieszscher Mittel äquisummierbar mit den gewöhnlichen trigonometrischen Fourierentwicklungen.

H. FRENTZEN:

Grenzpunktkriterien für Differentialgleichungssysteme 2. Ordnung.

Auf $I=[a,b)$ betrachtet man für $\lambda\in\mathbb{C}$ das System (1) $(Py')'+(Q_1+Q_2)y=\lambda Ry$ wobei $P>0$, $R\geq 0$ f.ü. und P^{-1}, Q_j und R lokal integrable Abbildungen in die hermiteschen mxm-Matrizen sind. Es wird das folgende Kriterium bewiesen:

Satz: Seien $d,K>0$, $0\leq c\leq 1$ und für alle $l\in\mathbb{N}$ $w_l: I\longrightarrow[0,\infty)$ absolut stetig, Träger von w_l kompakt, $h_l I\longrightarrow\mathbb{R}$ lokal absolut stetig, $|w_l(a)|\leq K$, $|h_l(a)|\leq K$, $v_l: I\longrightarrow[0,\infty)$ meßbar, $v_l^2 P$ lokal integrabel, so daß f.ü. auf I gilt:

$-w_l^2\, Q_2\leq w_l^{1+c} h_l' E_m$ (wobei E_m die mxm-Einheitsmatrix ist),

$(w_l^c\, h_l)^2 P^{-1}\leq KR$, $[(1+d)w_l'^2+v_l^2]\, P - w_l^2\, Q_1\leq KR$ und

$\lim\limits_{l\to\infty}\int_I w_l v_l=\infty$. Dann gilt für alle $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$:

dim $\{y$ Lösung von (1) für λ mit y^*Ry integrabel$\}=m$.

Für $m=1$ und $Q_2=o$ ist das i.w. ein Kriterium von Atkinson und Evans (1972). Analog erhält man u.a. entsprechende Verallgemeinerungen einiger Sätze von Read (1976, 1977), die ihrerseits eine Reihe bekannter Kriterien zur Folge haben.

B. HARGRAVE:

Uniform Asymptotic Approximations for Solutions of Doubly Periodic Differential Equations.

The two doubly periodic differential equations, Lamé's equation and the ellipsoidal wave equation, display a variety of problems, when one considers approximation of the eigenvalues and eigenfunctions by means of asymptotic techniques. Some problems suggest that new techniques are necessary: some problems, which may be solved by existing techniques, will be considered in detail.

J.K.M. JANSEN:

Simple-Periodic and Non-Periodic Lamé Functions and their Application in the Theory of Conical Wave Guides.

The first problem in the investigation of the electromagnetic field inside a conical-horn feed with elliptical cross-section is to select a suitable coordinate system, with the following properties:

(1) the boundary of the cone must be coordinate surface;
(2) the scalar Helmholtz equation must be separable;
(3) the parametric representation of the coordinate system must be chosen so that the solutions of the separated equations are easy to find.

A coordinate system that satisfies these conditions is the sixth coordinate system of Eisenhart, viz., the sphero-conal system parametrically represented by trigonometric functions as described for the first time by Kraus in 1955. Separating the Helmholtz equation, we obtain three equations:

(1) for the r dependence: the differential equation of the spherical Bessel functions;
(2) for the φ dependence: the Lamé differential equation with periodic boundary conditions;
(3) for the Θ dependence: the Lamé differential equation with non-periodic boundary conditions.

W. Kaballo

Zum Spektralkern symmetrischer Erweiterungen

Ist $T:\mathcal{D}(T)\to H$ ein symmetrischer (abgeschlossener) Operator mit $\overline{\mathcal{D}(T)}=H$, so ist $S_c(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,R(T-\lambda I)\neq\overline{R(T-\lambda I)}\}$ der kontinuierliche Teil des Spektralkerns von T; man vgl. etwa die Bücher von Achieser-Glasmann, Neumark oder Smirnov. Es wird gezeigt, daß für eine abgeschlossene symmetrische Erweiterung $\tilde{T}$ von T die in obigen Büchern als evident behauptete Inklusion $S_c(T)\subseteq S_c(\tilde{T})$ i. a. falsch ist. Dies ergibt sich aus dem folgenden

Satz Es seien $A\subset\tilde{A}$ symmetrisch, abgeschlossen, $R(A)=\overline{R(A)}$, $R(\tilde{A})=\overline{R(\tilde{A})}$ (und $\mathcal{D}(A)$ dicht in H). Dann sind äquivalent:

1) Es gibt ein abgeschlossenes B mit $A\subset B\subset\tilde{A}$ und $R(B)\neq\overline{R(B)}$

2) Es ist $\dim N(\tilde{A})/_{N(A)}=\infty$ und $\dim R(\tilde{A})/_{R(A)}=\infty$.

Mit Hilfe einer l_2-direkten Summe gewöhnlicher Differentialoperatoren wird dann gezeigt, daß die Situation des Satzes wirklich auftritt; somit sind $S_c(T)$ und $S_c(\tilde{T})$ i.a. unvergleichbar (hat T endliche Defektindizes, so ist natürlich $S_c(T)=S_c(\tilde{T})$!).

R. MENNICKEN:

Nicht-selbstadjungierte Rand-Eigenwertprobleme.

Ausgehend von Arbeiten der Autoren Langer 1939 und Cole 1964/65 werden im Parameter nicht-lineare Rand-Eigenwertprobleme für lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung betrachtet. Dazu wird exemplarisch auf $C_1^n[a,b]$ der Differentialoperator

$$T_D(\lambda)y = y' + A(.,\lambda)y$$

und der Randoperator

$$T_R(\lambda)y = \sum_{h=1}^{l} w^h(\lambda)y(a_h) + \int_a^b w(x,\lambda)y(x)dx$$

mit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_l = b$ zum Randwertoperator $T(\lambda)y=(T_D(\lambda)y, T_R(\lambda)y)$ zusammengefaßt. Hierzu wird der adjungierte Randwertoperator, der das adjungierte REW-Problem definiert, hinzugenommen. Es ergeben sich elementare Eigenschaften über Nullität und Defekt von $T(\lambda)$ und $T^*(\lambda)$. Weiter wird der Begriff der Normalität des Operatorbündels T eingeführt und diskutiert. Bewiesen wird für derartige Bündel insbesondere die Existenz biorthogonaler Systeme von Eigenlösungen des vorgegebenen und des zugehörigen adjungierten REW-Problems. Ferner wird die Frage der Vollständigkeit dieser Biorthogonalsysteme behandelt; dazu wird u. a. $T_D(\lambda)$ als linear und $T_R(\lambda)$ als polynomial in λ vorausgesetzt. Zur Definition 'biorthogonaler' Projektoren auf die Eigenräume wird die Resolvente geeignet gewichtet; außerdem wird erkannt, welcher Art die an die zu entwickelnde Funktion zu stellenden Randbedingungen sind.

Speziell werden Verallgemeinerungen der Untersuchungen von Eberhard und Freiling über N-reguläre REW-Probleme bei Differentialgleichungen n-ter Ordnung mitgeteilt. Darüberhinaus wird ein Entwicklungssatz für analytische Funktionen nach Eigenlösungen einer verallgemeinerten (nämlich in Parameter quadratischen) Hillschen Differentialgleichung notiert.

L. Neckermann

Zur Darstellung stückweise stetiger Funktionen durch Fourierreihen nach Eigenfunktionen einer einseitig singulären Randwertaufgabe für die Legendresche Differentialgleichung speziell in der Umgebung der Singularität.

Fouriersche Reihen nach den Eigenfunktionen $\{\varphi_n(x)\}$ der singulären Sturm-Liouvilleschen Randwertaufgabe:

$$[(1-x^2)y']' + \lambda(\lambda+1)y = 0; \quad 0 \leq x \leq 1, \; -1 < c < 1; \; \lambda \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = O(1) \text{ für } x \to 1-0 \text{ und } y(c) = 0$$

treten z. B. bei der Behandlung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie für Kreiskegelgebiete auf. Das Hauptergebnis dieses Vortrages ist ein Darstellungssatz für stückweise stetige, stückweise differenzierbare Funktionen mit Ableitungen von beschränkter Schwankung. Der Beweis wird, bedingt durch das Heranziehen verschiedener asymptotischer Darstellungen vor allem in der Umgebung von x = 1, durch mühevolle Untersuchung von Teilsummen bzw. -reihen der Fourierreihen der Form $\sum_{\nu=n_1(x)}^{n_2(x)} a_\nu \varphi_\nu(x)$ geführt. (Analoge Aussagen lassen sich auch für Fourier-Besselsche Reihen herleiten.)

A. Ronveaux, P. Maroni

Formes canoniques des équations confluentes de l'Equation de Heun

La séparation de l'équation de Helmholtz dans les systèmesde coordonnées curvilignes elliptiques (non dégénérés et dégénérés) conduit à des équations plus générales que les équations de la classe de l'hypergéométrique : ce sont les équations de la classe de Heun. L'équation de Heun est une équation fuchsienne à 4 points singuliers réguliers non élémentaires qui provient d'une équation de Lamé à huit points singuliers réguliers élémentaires (dont l'∞) par confluence de ces huit points deux à deux. Ces confluences engendrent les 4 équations confluentes de Heun: a) l'équation confluente de Heun; b) l'équation biconfluente de Heun; c) l'équation double-confluente de Heun; d) l'équation triconfluente de Heun. Pour chaque équation, trois formes sont présentées : la forme répresentative ou forme naturelle de la classe, obtenue par confluence de l'équation de Lamé, la forme canonique retenue pour ses propriétés de transformation par rapport à un groupe discret et la forme normale habituelle.

S. Sagraloff

Normale Auflösbarkeit, Existenz und Eindeutigkeit bei linearen partiellen Differentialgleichungen

Es werden Methoden der globalen Existenztheorie für lineare partielle Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten mitgeteilt. Grundlage hierzu ist ein Satz vom abgeschlossenen Wertebereich in Fréchetäumen, den der Vortragende kürzlich in manus. math. 22 (1977) publiziert hat. Im Vortrag wird dieser Satz auf lineare partielle Differentialoperatoren in den gewichteten Sobolevräumen $B^{loc}_{p,k}(\Omega)$ angewendet. Es werden nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Kriterien für normale Auflösbarkeit, speziell Surjektivität derartiger Differentialoperatoren hergeleitet. Gezeigt wird ferner, daß große Klassen von linearen partiellen Differentialoperatoren (elliptische, prinzipiell normale) unter der Voraussetzung der lokalen Eindeutigkeit beim Cauchyproblem auf einer geeigneten Teilmenge von Ω normal auflösbar sind.

R. Schäfke

Bemerkungen zur Okubo'schen Differentialgleichung $x'(t) = (B + \frac{1}{t}A)\,x(t)$

Mit $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ und $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, λ_i paarweise verschieden wird die Differentialgleichung betrachtet:

$$(D) \qquad x'(t) = (B + \frac{1}{t}A)x(t)$$

Daneben wird die Differenzengleichung betrachtet, der die Koeffizienten der Floquetschen Lösungen von (D) um 0 genügen):

$$(DZ_\lambda) \quad (w-A)g(w) = (B-\lambda)g(w-1) \qquad (\lambda \text{ Parameter}).$$

Für (D) werden Fundamentallösungen mit asymptotischem Verhalten (in Halbebenen) bei ∞ ausgezeichnet, für (DZ_λ) je eine Fundamentallösung mit asymptotischem Verhalten für $\operatorname{Re} w \to \infty$ bzw. $\operatorname{Re} w \to -\infty$. Mithilfe der Laplacetransformation werden die Koeffizienten der nun in naheliegender Weise auftretenden Zusammenhangsrelationen bei (D) und (DZ_λ) verglichen, zunächst mit Zusammenhangskoeffizienten bei $(s-B)v'(s)=(\rho-A)v(s)$, dann untereinander. Man erhält u. a. das Ergebnis von K. Okubo (1963), und daß einige der Zusammenhangskoeffizienten durch Rekursionen und anschließenden Grenzübergang erhalten werden können.

B. Schultze

Streng irreguläre Randwertprobleme

Eine neue Klasse irregulärer Randwertprobleme - nicht regulär im Sinne von Birkhoff - wird betrachtet. Diese Klasse umfaßt die Randwertprobleme mit irregulären zerfallenden Randbedingungen. Zu jedem streng irregulären Problem kann man ein Problem mit zerfallenen Randbedingungen konstruieren, so daß ein Äquikonvergenzsatz bezüglich Riesz'scher Mittel für die Reihenentwicklungen einer integrierbaren Funktion nach Eigenfunktionen der beiden Probleme gilt.

R. Sips

Une nouvelle méthode d'intégration explicite des équations différentielles non linéaires du meme type que celles de la couche limite hydrodynamique.

Le problème à résoudre est de trouver une solution y(x) d'une équation différentielle non linéaire, constamment décroissante pour x réel et variant entre 0 et , tendant vers zéro pour x et satisfaisant de plus à certaines conditions aux limites pour $x = 0$. Si le développement en série de puissances autours de $x = 0$, dont le rayon de convergence est fini, est

$$y(x) = \sum_{m=o}^{\infty} c_m x^m \qquad (1)$$

on détermine un second développement de la même fonction, de la forme

$$y(x) = \sum_{m=o}^{m=2n-1} a_m e^{-\lambda_m x}$$

où les coefficients a_m et les exposants λ_m sont déterminés de telle facon que les 2n premiers termes du développement en série de puissances de (2) soient identiques aux 2n premiers termes de l'expression (1). Ceci se fait aisément en utilisant une méthode indiquée par de Prony en 1795 et dont nous avons parlé au cours d'une précédente réunion (1971).

Il est de cette manière possible de former des expressions représentat explicitement y(x) pour toutes les valeurs de x.

Le procédé a été utilisé avec succès pour les équations de Blasius, de Faulkner-Skan, de Thomas-Fermi, de Polhausen, et meme pour certaines équations linéaires, par exemple celle relative à la théorie du deutéron.

B.D. Sleeman

Multiparameter Periodic Differential Equations

In recent years interest has been generated in eigenvalue problems associated with systems of ordinary differential equations linked via several special parameters. Such problems are motivated by the application of the method of separation of variables to boundary value problems for partial differential equations. A number of the multiparameter eigenvalue problems which arise in mathematical physics involve differential equations with periodic coefficients. In this lecture we study in a rather general way the existence of periodic solutions and establish theorems related to interlacing of eigenvalues, stability regions and certain generalisations of the Floquet theory. All these theorems extend to the multiparameter case the well known results of the classical one-parameter theory.

J. Vaupel

Zur Spektraltheorie von Paaren nicht-selbstadjungierter Differentialoperatoren in $L^2(\mathbb{R})$ und $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Seien X,Y komplexe Banachräume, $D \subset X$ dichter Teilraum, sowie $M,N : D \to Y$ lineare Operatoren. Dann heiße

$$\rho(M,N) := \{\lambda \in C \mid (M-\lambda N)^{-1}N \text{ stetig auf } D\}$$

die "Resolventenmenge", $\sigma(M,N) := C \setminus \rho(M,N)$ das "Spektrum" und $R(\lambda;M,N)$ = stetige Fortsetzung von $(M-\lambda N)^{-1}N$ auf X $(\lambda \in \rho(M,N))$ die "Resolvente" des Paares (M,N). (M,N) heißt "Spektralpaar", wenn $R(\lambda;M,N)$ Spektraloperator im Sinne von Dunford ist, für dessen Spektralmaß E_λ gilt: $E_\lambda(\{0\}) = 0$.

Es werden hinreichende Bedingungen an die Ordnungen und (im Falle $I = \mathbb{R}^+$) Randbedingungen dafür angegeben, daß Differentialausdrücke der Form

$$M' : y \longrightarrow \sum_{k=0}^{m} M_k' \cdot D^k y, \quad N' : y \longrightarrow \sum_{k=0}^{m} N_k' \cdot D^k y \quad (M_n', N_n' \in C^{s\times s})$$

Spektralpaare (mit "Spektralsingularitäten") in $X = L^2(I,C^s)$, $I \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^+\}$, erzeugen. Ferner wird eine Klasse von Störungen (M",N") derart angegeben, daß (M,N)=(M'+M", N'+N") Spektralpaare sind. Es wird diskutiert, wie die Menge der "Spektralsingularitäten" von (M,N) beschaffen ist und unter welchen Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen von M" und N" diese Menge endlich ist.

H. Volkmer

Integralbeziehungen mit variablen Grenzen für spezielle Funktionen der math. Physik.

Ein Beispiel:

Sei φ auf $\mathbb{C}^2$ Lösung der ebenen Schwingungsgleichung im elliptischen Koordinaten

(1) $$(\partial_1^2 + \partial_2^2)\varphi + \alpha^2 c^2 (\cosh^2\eta - \cos^2\xi) = 0$$

und (ξ_0, η_0) ein Punkt in $\mathbb{C}^2$.

Dann gilt folgende Integralrelation für φ:

(2) $$\varphi(\xi_0,\eta_0) = \varphi(\xi_0 - i\eta_0, 0) + \int_{\xi_0 - i\eta_0}^{\xi_0 + i\eta_0} \left[k_1(t)\left(\frac{1}{2}\partial_1\varphi + \frac{1}{2i}\partial_2\varphi\right)(t,0) + k_2(t)\varphi(t,0)\right] dt$$

mit den Kernen

$$k_1(t) = T_0\left(\sqrt{\alpha^2 c^2 (\cos t - \cos(\xi_0 + i\eta_0))(\cos t - \cos(\xi_0 - i\eta_0))}\right)$$

$$k_2(t) = \alpha^2 c^2 (\cos t - \cos(\xi_0 + i\eta_0)) \sin t \; \frac{T_1(\sqrt{\ldots})}{2(\sqrt{\ldots})}$$

Interessant ist (2) vor allem für separierte Lösungen $\varphi(\xi,\eta) = \varphi_1(\xi)\varphi_2(\eta)$ mit Mathieu-Funktionen φ_1, φ_2. Der Spezialfall $\varphi_2(0) = 0$ ist vermerkt im Buch von Meixner-Schäfke "Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen", Abschnitt 2.82. (Gleichung (2) kann so erhalten werden: Transformiere (1) mit $\rho = \xi + i\eta$, $\rho^* = \xi - i\eta$ und wende auf die entstehende Dgl. die bekannte Riemann-Formel an. Anschließend übersetze diese Formel wieder für Lösungen von (1). Die Kerne k_1, k_2 werden dabei durch die Riemann-Funktionen der Telegraphengleichung bestimmt.

Die allgemeine Methode, die im Vortrag angedeutet wurde, hier aber nur am Beispiel illustriert werden kann, liefert viele weitere Relationen vom Typ (2). Erwähnt sei eine Integralbeziehung für Produkte von Lamé-Funktionen mit Kernen, die durch Kugelfunktionen gegeben werden.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

E. Wagenführer

Zur Eigenwertberechnung bei der endlichen Hillschen Differentialgleichung

Die im Zusammenhang mit der endlichen Hillschen Differentialgleichung

$$(*) \qquad y''(x) + (\lambda + \sum_{k=1}^{l} (2t_k)\cos(2kx))y(x) = 0$$

auftretende Eigenwertaufgabe ist folgendes Problem: zu vorgegebenem ν sind Werte λ gesucht, so daß (*) eine Floquetsche Lösung zum charakteristischen Exponenten ν besitzt. Diese Aufgabe läßt sich auf die numerische Berechnung der kanonischen Fundamentallösungen von (*) zurückführen. Als Verfahren der numerischen Integration hat sich dabei das Taylor-Verfahren hoher Ordnung als besonders geeignet erwiesen. Es ist bezüglich der Rechenzeiten allen anderen Integrationsmethoden überlegen, und es gestattet eine umfassende Fehleranalyse.

Berichterstatter: M. Mendel, Wuppertal