MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 16/1978

Freie und gemischte Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen

16.4. bis 22.4.1978

Die in diesem Jahr erstmalig veranstaltete Tagung über freie und gemischte Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen stand unter der Leitung von R. Kreß (Göttingen) und N. Weck (Essen). Trotz des Termins zu Beginn des Sommersemesters fanden sich 36 Teilnehmer aus dem In- und Ausland zusammen, um in 24 Vorträgen und vielen kleinen Gesprächsrunden die verschiedensten Aspekte der Thematik zu untersuchen. Dabei zeigten die Beiträge aus der Strömungsphysik, den Ingenieurwissenschaften und der Geologie, wie eng gerade bei freien Randwertproblemen die Verbindung von Theorie und Praxis ist und welch große Bedeutung derartigen Tagungen für die Vermittlung der theoretischen Ergebnisse in die Praxis zukommt.

Dem Institut und seinem Personal gebührt herzlicher Dank, daß es den harmonischen Verlauf der Tagung ermöglichte.

Teilnehmer

Alber, H.D., Bonn
Berestycki, H., Paris
Bischoff, H., Darmstadt
Brosowski, B., Frankfurt
Buggle, G., Darmstadt
Damlamian, A., Orsay
Donig, J., Darmstadt
Dzuraev, A., Darmstadt
Fichera, G., Rom
Gorenflo, R., Berlin
Grafarend, E., München
Hadeler, K.P., Tübingen
Hoffmann, K.-H., Berlin
Kawohl, B., Darmstadt
Kirchgässner, K., Stuttgart
Kreß, R., Göttingen
Latz, N., Berlin
Leis, R., Bonn
Mäulen, J., Stuttgart
Martensen, E., Karlsruhe
Meister, E., Darmstadt
Pfeifroth, L., Darmstadt

Soculescu, D., Karlsruhe
Steffen, B., Göttingen
Stephan, E., Darmstadt
Taubert, K., Hamburg
Turner, J.R., Oxford
Ursell, F., Manchester
Velte, W., Würzburg
de Vries, H.L., Göttingen
Weck, N., Essen
Wegmann, R., München
Wendland, W., Darmstadt
Werner, B., Hamburg
Werner, P., Stuttgart
Witsch, K.J., Bonn

Vortragsauszüge

E. Meister: Einige gemischte Randwertprobleme für Unterschallströmungen um schwingende Profile

Instationäre ebene Strömungen um Profile mit Abreißgebieten wurden für inkompressible Medien u.a. von T.V. Davies, F. Sisto, M. Tulin, L.C. Wood und dem Ref. vor längerer Zeit untersucht. Basierend auf dem Woodschen Modell und für dünne, schwach gewölbte Profile - einzeln, im Kanal oder im Gitterverband - mit festen Abreißpunkten und vorgegebenen Druckverteilungen längs der Randkurven des Abreißgebiets wird bei Unterschallanströmung das gemischte Randwertproblem für die zugehörige Helmholtzsche Schwingungsgleichung formuliert. Mittels Fouriertransformation erhält man 2 x 2-Systeme von Mehrteil-Wiener-Hopf-Funktionalgleichungen, die sich im Grenzfall nicht abgerissener Strömungen auf skalare Dreiteil-WH-Gleichungen reduzieren, wie sie u.a. vom Ref. eingehend untersucht wurden. Hier ist es erforderlich, auf $\overline{\mathbb{R}}$ stückweise stetige 2 x 2-Funktionenmatrizen zu faktorisieren. Im Falle der an der Profilnase abreißenden Strömung kann das Dreiteil-System durch zweimalige Anwendung des vektoriellen WH-Verfahrens in ein reziprokes, alternierendes 4 x 4-Funktionalgleichungssystem für Paare von 2 x 1-Randwertvektoren überführt werden.

D. Soculescu: Über neue Randwertprobleme für die stationären Navier-Stokes-Gleichungen

Es werden drei Typen von gemischten Randwertproblemen für die stationären Navier-Stokes Gleichungen betrachtet. Diese Randwertaufgaben tauchen auf bei der stationären Strömung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit einerseits im Zusammenhang mit einem neuen hydrodynamischen Modell etwa bei einem Behälter oder Rohr, andererseits im Zusammenhang mit einer freien Oberfläche oder Grenzfläche zwischen zwei Flüssigkeiten. Für jedes dieser Randwertprobleme wird die Existenz einer (evtl. eindeutigen) klassischen Lösung untersucht. Der Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis wird jeweils mit Hilbertraummethoden geführt. Da alle diese Randwertaufgaben lokal sachgemäß im Sinne von Agmon, Douglas und Nirenberg sind, zeigt man schließlich mit Hilfe der zugehörigen Regularisierungstheorie, daß die jeweiligen schwachen Lösungen für genügend glatte Gebiete und Randbedingungen klassisch sind.

A. Džuraev: Boundary value problems for systems of composite type.

Partial differential equations are called of composite type, if they have both real and nonreal characteristics. Some simple examples of scalar equations of this kind were investigated by J. Hadamard and other authors. In Džuraev's book (see math. Rev. 3341, vol 49, 1975), principal boundary value problems for first order systems of composite type in two dimensional bounded domains were formulated and investigated. In this lecture some boundary value problems for three dimensional systems of composite type were formulated and solved.

E. Grafarend: The free, nonlinear geodetic boundary value problem and its finite element approximation

In order to determine the geometry of the earth surface a free, nonlinear boundary value problem of the Laplacean has to be solved. A finite element sulution through geodetic observational functionals is presented leading to the norm choice problem of geodetic collocation.

K.J. Witsch: Zum geodätischen Randproblem

Das geodätische Randproblem besteht darin, aus Messungen des Schwerevektors und des Potentials auf der Erdoberfläche die euklidische Gestalt der Erde zu bestimmen. In diesem Vortrag soll über ein Eindeutigkeitsresultat berichtet werden. Sind die Daten für eine äußere Potentialfunktion und deren Gradient auf dem freien Rand bekannt, so ist der freie Rand eindeutig bestimmt, falls a-priori bekannt ist, daß er in einer C_1-Umbebung einer "Normalkonfiguration (Telluroid)" liegt. Schranken für die C_1-Umgebung sind prinzipiell bestimmbar.

L. Pfeifroth: Reibungsfreie Strömungen mit Massenzufuhr an der freien Oberfläche.

Folgendes Problem aus der Hydrodynamik wird untersucht:
Eine ideale dichtebeständige Flüssigkeit "regnet" auf eine undurchlässige Fläche. Man bestimme die Strömung in dem so entstehenden Flüssigkeitsfilm. Ist die Strömung eben, so erhält man für die Stromfunktion das folgende freie Randwertproblem:

im Film: $\Delta\psi = \frac{d}{d\psi} B(\psi)$

auf b : $\psi = 0$

auf s : $\psi = f, \; \frac{\delta\psi}{\delta n} = g$

b ist der gegebene Boden, s die gesuchte Filmoberfläche; f ist gegeben; g und $B(\psi)$ hängen von der Gestalt der unbekannten Filmoberfläche ab.

Das Problem wird für den Sonderfall B = konst. exakt gelöst. Die

Lösung des allgemeinen Problems wird in eine Potenzreihe nach $\varepsilon = \rho_k / \rho_o < 1$ entwickelt (ρ_o : Flüssigkeitsdichte im Film; ρ_k : mittlere Regendichte). Man erhält so eine einfache Näherung für die Filmdicke.

A. Damlamian: A variational formulation for the multiphase Stefan problem.

A multiphase Stefan problem on a bounded domain Ω is shown to have a weak formulation in terms of the energy u in which the free boundary does not appear explicitly:

$$\int_{(O,T)\times\Omega} w'u + \int_O^T a(\ (u)-g,w) = \int_{(O,T)\times\Omega} f \cdot w + \int_\Omega u_o\, w(o)$$

where a is a symmetric bilinear form, $\beta(u)$ characterises the temperature assosiated with the energie u, f gives the internal heating and g a harmonic lifting of the inhomogeneous boundary conditions. A change in phase is indicated by a jump of energy without change of temperature.
Existence and uniqueness of u is proved by showing that the problem is equivalent to a non-linear parabolic equation with a time-dependent subdifferential on $(H^1_{\Gamma^-})^*$ (Γ^- the part of the boundary with Dirichlet data).
If Γ^- varies with time continuously, the existence of a weak solution is shown, while the question of uniqueness is still open. In treating the problem as a limit of non-degenerate weak parabolic problems the limiting process requires a new non-standard compactness theorem.

J.R. Turner: A Variational Formulation and Finite Element Solution of the Frictional Unloading Problem in Linear Elasticity.

A variational formulation is obtained for the problem of loading and unloading a linear elastic half-space by a rigid cylindrical purch when conditions of Coulomb friction act over the interface throughout. The loading problem can be treated by integral equation techniques because the regions of differential inward slip and adhesion can be predicted in advance. For the unloading problem it can be shown that the solution minimizes the complementary energy, which may be expressed as a quadratic function of the surface stresses alone, while the frictious conditions act as linear constraints on the minimization.

A numerical solution was obtained using the finite element technique in such a way that the quadratic simplex algortithm could be applied. The surface radial stress distribution obtained for the discrete solution predicts delayed fracture of brittle materials on unloading.

B. Werner: <u>The hypercircle method for free elliptic boundary value problems</u>

The starting point is an obstacle problem (which can be interpeted as a free BVP), stated as a convex variational problem

(1a) $J(u) = \min !$, J being a convex, G-differentiable functional on a linear space Z, with the linear constraints

(1b) $u \in V = u^o + C$, C being a cone with tip in O.
Following ideas in Friedrichs [1929] and Velte [1976] we construct on a very elementary way a complementary variational principle for (1):

(2a) $K(v) = \max !$, $K(v) := J(v) + J'(v)(u_o - v)$,

(2b) $v \in V^K := \{w \in Z : J'(w) \geq 0$ with respect to the dual Cone $C'\}$.
For the obstucle problem we show how different choices of Z yield different complementary priciples, one of which being well suited to compute feasable finite element functions.

It is shown that the hypercircle method leads in analogy to the case of a linear subspace C (Prager/Synge [1947]) to energy norm estimates for the solution $\bar{u}$

$$\left.\begin{array}{ll} \| u - \bar{u} \|^2, \| v - \bar{u} \|^2 & \leq 2(J(u)-K(v)) \\ \| \bar{u} - \frac{u+v}{2} \|^2 & \leq J(u) - K(v) - \frac{1}{4} \|u - v\|^2 \end{array}\right\} \text{ for } \begin{array}{l} u \in V, \\ v \in V^K. \end{array}$$

F. Ursell: On the exterior problems of acoustics and water-wave theory.

The method of integral equations is the most familiar method for proving existence theorems for the Helmholtz equation of acoustics. The wave potentials are expressed as surface distributions of wave sources (for the Neumann problem) or wave dipoles (for the Dirichlet problem). By a wave source is meant the free-space wave source. The source and dipole strengths are found to be solutions of Fredholm equations of the second kind, but the Fredholm determinant may vanish at certain frequencies (the irregular frequencies) and the method then breaks down. If the free-space wave source is replaced by a different fundamental solution the irregular frequencies are also changed, and may even be removed altogether. This talk will describe applications of this idea to acoustics, to short-wave asymptotics, and to computational problems of water-wave theory.

R. Leis: Zur Theorie der Integraltransformationen

In den letzten Jahren sind zu vielen Differentialgleichungen der mathematischen Physik Außenraumaufgaben behandelt worden. Kennt man die Lösungen solcher Außenraumaufgaben, dann kann man leicht Integraltransformationen und ihre Umkehrformeln ausrechnen (Stonesche Formeln, Methode der Grenzabsorption, Spektralsatz). Dies wird an drei Beispielen vorgeführt, nämlich an der Fourier-Sinus-Transformation, an der Lebedev-Transformation und an der zur Dirichletschen Randwertaufgabe der Plattengleichung gehörenden Transformation.

H.D. Alber: Eine Abschätzung für die Lösungen der Schwingungsgleichung, mit einer Anwendung auf partielle Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten.

Für die Differentialgleichung

$$\sum_{e,m=1}^{n} b_{e,m}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_e \partial x_m} u + \sum_{m=1}^{n} c_m(x) \frac{\partial}{\partial x_m} u + d(x)\, u + k^2 u = f \quad (k > 0)$$

wird gezeigt, daß die Fredholmsche Alternative gültig ist falls

$$f \in L_2^{loc}(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_{\Omega m} | f |^2 \, dx \right]^{1/2} < \infty$$

mit $\Omega_m = \{x \in \mathbb{R}^n | m \leq |x| \leq m+1\}$.
Diese Bedingung erinnert an eine Lösbarkeitsbedingung von Agmon und Hörmander (Journal d'Analyse Mathematique, 30 (1976)), ist jedoch schwächer als diese.

Zum Beweis zeigt man zunächst, daß $\Delta u + k^2 u = f$ lösbar ist und das für die Lösung u gilt.

$$|| u ||_{2;\Omega r} \leq (r+1)^{1/3} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_{\Omega m} | f |^2 \, dx \right]^{1/2} .$$

Dann schreibt man die Differentialgleichung in der Form

$(\Delta + k^2)u + \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha u = f$, und faßt die Summe als Störung des Operators $(\Delta + k^2)$ auf. Für die Koeffizienten a_α ergibt sich dabei folgende Abklingbedingung

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{1/3} \sup_{x \in \Omega_m} | a_\alpha(x) | < \infty .$$

P. Werner: Anfangs- und Randwertprobleme für die vektorielle Wellengleichung.

Es sei Ω ein Außengebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$. Wir untersuchen

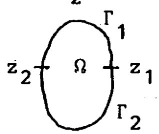
Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Lösungen G der vektoriellen Wellengleichung $(\partial_t^2 - \Delta)G = J$ zu vorgegebenen Anfangsbedingungen $G(x,0) = G_0(x)$, $\partial_t G(x,0) = G_1(x)$, wobei auf $\partial\Omega$ entweder die "elektrischen" Randbedingungen $n \times G = 0$, $\nabla \cdot G = 0$ oder die "magnetischen" Randbedingungen $n \times (\nabla \times G) = 0$, $n \cdot G = 0$ vorgeschrieben sind. Die Existenz von Lösungen wird mit Hilfe des Funktionalkalküls für selbstadjungierte Operatoren bewiesen. Mit Hilfe einer genaueren Diskussion des Spektrums (kontinuierlich in $[0,\infty)$, Eigenwert bei 0) läßt sich das Verhalten der Lösungen für $t \to \infty$ erfassen. Insbesondere ergeben sich notwendige und hinreichende Bedingungen für das Abklingen der Lösungen im Fall $J = 0$ und für die Gültigkeit des Prinzips der Grenzamplitude für zeitharmonisches J.

W. Wendland: <u>Integralgleichungen und gemischte Randwertaufgaben.</u>

Als Modell für Integralgeichungsmethoden wurde das klassische Problem $\Delta u = 0$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ gewählt,

$u|_{\Gamma_1} = g_1$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = g_2$ mit $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{z_1\} \cup \{z_2\}$ glatte einfach geschlossene Kurve.



Das gemischte Problem ist einem System von Integralgleichungen äquivalent, wobei eine Gleichung Fredholm zweiter Art und eine Fredholm erster Art ist. Das System entspricht einem System stark elliptischer Pseudodifferentialgleichungen auf berandeten Mannigfaltigkeiten, hier Γ_1 und Γ_2. Deshalb ist eine genauere Charakterisierung des Lösungsverhaltens in z_1, z_2 nötig. Mit Hilfe von Ergebnissen von Fichera, Keldysh u. Sadov, Wigley, Peetre, Skamir usw. wird die Belegung $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf Γ_1 zerlegt und die Fredholm-Alternative und a-priori Abschätzungen für die Integralgleichungen in geeigneten Sobolev Räumen können gezeigt werden. Damit erhalt man auch für Galerkin Verfahren unter der Verwendung finiter Elemente und geeigneter Zusatzfunktionen optimale Konvergenzordnungen.

Für die numerische Implementierung wird ein Vorgehen vorgeschlagen, das bei nicht gemischten Randwertaufgaben effektiv und genau arbeitet.

Der Vortrag stellte Ergebnisse einer gemeinsamen Arbeit von G.C. Hsiao, E. Stephan und des Vortragenden dar.

H.L. de Vries: Über ein Koeffizientenproblem bei Eilinien.

E. Heinz hat 1952 in einem Lemma über harmonische Abbildungen die Existenz einer Konstanten $\mu > 0$ nachgewiesen, deren numerischer Wert trotz vielfacher Bemühungen noch unbekannt ist. Vermutlich gilt $\mu = \frac{27}{2\pi^2} = 1.367$. Die Bestimmung von μ kann als ein freies Randwertproblem bei partiellen Differentialgleichungen aufgefaßt werden. Man kann das Problem aber auch in folgende Form bringen, wie ich 1969 gezeigt habe:
Gegeben sei eine Eilinie E vom Umfang 2π. Sei mit Hurwitz 1901.

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ns + b_n \sin ns),$$

$$y = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos ns + d_n \sin ns)$$

ihre Fourierentwicklung. Zu E definieren wir das Eilinienfunktional $\Phi_1(E) := a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2$. Dann ist auch $\mu = \inf_E \Phi_1(E)$. Es werden Funktionale $T_q(E)$, $q \in N$, eingeführt und gezeigt, daß eine Reihenentwicklung

$$\Phi_1(E) = \sum_{q=2}^{\infty} \alpha_q T_q(E)$$

existiert, in der die α_q positiv sind. Beschränkt man sich auf Dreiecke D vom Umfang 2π, so gilt, wenn D_0 das gleichzeitige Dreieck bezeichnet,

$$T_q(D) \geq T_q(D_0), \text{ also } \Phi_1(D) \geq \Phi_1(D_0) = \frac{27}{2\pi^2}.$$

Das allgemeine Problem bleibt ungelöst.

H. Berestycki: <u>On a free boundary problem arising in plasma physics.</u>

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ b a smooth bounded domain, $\Gamma = \partial\Omega$. Consider the following free boundary problem:

<u>Problem:</u> <u>Find $u \in H^2(\Omega)$, $\Omega_p = \{x \in \Omega;\ u(x) > 0\}$ and $\Gamma_p = \partial\Omega_p$</u> <u>such that</u>

(1) $Lu = g(x,u)$ in Ω_p, (2) $Lu = 0$ in $\Omega - \overline{\Omega}_p$

(3) $u|_{\Gamma}$ is (an a-priori unknown) constant

(4) $u|_{\Gamma_p} = 0$, (5) $\int_{\Omega_p} g(x,u)\,dx = I > 0$ (given).

L is a self adjoint elliptic operator, $g(x,z) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ is continous, in creases with z and satisfies certain growth conditions when $z \to +\infty$. This type of problem arises in the MHD description of the equilibrium of a plasma confined in a toroidal cavity ("Tokamak machine"). A similar problem also arises in the theory of steady vortex sings. We prove the existence of a solution by solving an auxiliary variational problem. Furthermore, when $g(x,z)$ is Lipschitz in z, with small Lipschitz constant, then the solution is unique.

D. Socolescu: <u>A free boundary problem for the stationary Navier-Stokes-equation.</u>

The steady two-dimensional flow of a viscous incompressible fluid under gravity in an open channel is studied. The difficulties of this problem are the following:

i) Ω is a priori unknown

ii) Ω is unbounded.

The problem is solved as follows:

At first Ω is assumed to be known. The arising mixed boundary value problem can be shown to have a unique classical solution by applying Hilbert space methods and using the regularity results of Agmon, Douglas and Nirenberg.

Then the existance of the free boundary can be proved by Banachs fixed point theorem.

H. Bischoff: Gemischte Randwertprobleme mit freiem Spiegel in der Hydromechanik.

Der Vortrag stellte einige Freispiegelprobleme aus der Sicht eines Bauingenieurs vor. Viele Fließvorgänge lassen sich genügend genau mit dem mathematischen Modell einer Potentialströmung beschreiben, so z.B. der Abfluß über beliebig gestaltete Überfälle oder die Filterströmung der Grundwasserbewegung. Die jeweiligen Spiegellinien sind zumeist Ränder unbekannter Lage mit der Bedingung $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$. Es liegt mithin eine gemischte Randwertaufgabe für $\Delta\Phi = 0$ mit freien Rändern vor. Zur numerischen Berechnung dieses Problems wurde aus der Greenschen Formel durch partielle Integration ein gemischter Einfachschichtansatz ("Quellen"- und "Wirblel"-schicht) gewonnen, der nach Einführen der Stromfunktion ψ mit $\nabla\Phi \cdot \nabla\psi = 0$ die gemischte Randwertaufgabe zu einem Dirichlet-Problem für jeweils Φ und ψ auf $\partial\Omega$ macht.

Die neue Darstellungsform kann als IGL 1. Art zur iterativen Berechnung der freien Ränder dienen, wie dies für die Dammdurchsickerung bereits erfolgreich geschehen ist. Die Bestimmung des freien Spiegels bei reibungsfreier Strömung ist schwieriger, da hier von der Isobarenbedingung aus die Randstromlinie gesucht wird. Die geplante Vorgehensweise wurde angedeutet.

Da die Verwendung einer Mischbelegung vom Typ $2\pi\,\Phi = \oint\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\ln r + \frac{\partial\Phi}{\partial s}\beta\right)ds$ derzeit unüblich ist, war eine theoretische Begründung der ausgezeichneten numerischen Ergebnisse nicht möglich.

Der Vortrag sollte als Anregung dienen, diesen Lösungsweg von Seiten der Mathematik etwas genauer zu untersuchen.

E. Martensen: Konvergenz des Rothe-Verfahrens für die Maxwellschen Gleichungen.

Für ein Kompaktum $B \subset \mathbb{R}^3$ mit hinreichend glattem Rand $S := \partial B$ und ein festes Zeitintervall $I := [0,T]$ werden die Maxwellschen Gleichungen betrachtet.

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{rot} H - 4\pi j, \quad \frac{1}{c}\,\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{rot} E - 4\pi m \quad \text{in} \quad B \times I$$

unter den Randbedingungen (3 elektrische, 2 magnetische Bedingungen, $[n,E] = 0$, $\operatorname{div} E = 0$, $[n, \operatorname{rot}\operatorname{rot} E] = 0$, $(n,H) = 0$, $[n, \operatorname{rot} H] = 0$ auf $S \times I$.

Dieses Problem wird nach Rothe diskretisiert, indem I in N äquidistante Zeitschritte der Länge $h = I/N$ unterteilt wird und die Maxwellschen Gleichungen ersetzt werden durch

$$\frac{1}{c\cdot h}\,(E_\gamma - E_{\gamma-1}) = \operatorname{rot} H_\gamma - 4\pi j \; ; \; \frac{1}{c\cdot h}\,(H_\gamma - H_{\gamma-1}) = \operatorname{rot} E_\gamma - 4\pi m_\gamma$$
$$\text{auf } B \times \{1,\ldots,N\}.$$

Es wird gezeigt, daß das Rothe-Verfahren im Falle vorgegebener Anfangswerte E_o, H_o zur Zeit $I = 0$ und unter Randbedingungen $[n,E_\gamma] = 0$, $\operatorname{div} E_\gamma = 0$, $[n, \operatorname{rot}\operatorname{rot} E_\gamma] = 0$, $(n,H_\gamma) = 0$, $[n, \operatorname{rot} H_\gamma] = 0$ auf $S \times \{1,\ldots,N\}$ gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems diskret gleichmässig konvergiert, falls diese Lösung genügend regulär sind und die Vorgaben die notwendigen Verträglichkeitsbedingungen erfüllen.

R. Wegmann: Ein konstruktives Verfahren für ein freies Randwertproblem aus der Potentialtheorie.

Es wird folgendes Problem behandelt:
Gegeben sind reelle Funktionen $u_t(s)$ und $u_n(s)$. Gesucht wird eine einfach geschlossene Kurve derart, daß es eine im Innern der Kurve harmonische Funktion u gibt, die an jedem Kurvenpunkt $\eta(s)$ die vorgegebenen Tangential- und Normalableitungen $u_t(s)$ und $u_n(s)$ hat. Dabei ist η eine Darstellung der Kurve durch eine komplexwertige Funktion, die auf die Bogenlänge s bezogen ist. Das Problem wird mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln behandelt. Aus der Cauchyschen Integralformel folgt eine nichtline-

are singuläre Integralgleichung für die Funktion η . Mit Hilfe einer Linearisierung dieser Gleichung wird ein Iterationsverfahren aufgebaut, bei dem sich die Änderung der Näherungskurven η_k aus einem Riemann-Hilbert-Poincaré-Problem berechnen läßt. Das Verfahren konvergiert unter gewissen zusätzlichen Bedingungen, wenn man mit analytischen Kurven arbeitet, und wenn die Startnäherung η_1 genügend nahe bei der richtigen Lösung η liegt. Das Verfahren ist auch numerisch brauchbar.

J. Dornig: <u>Über ein ebenes Problem der Elastizitätstheorie im Zusammenhang mit der Verstärkung von Platten.</u>

Wir betrachten eine unendlich ausgedehnte, in der komplexen ebene liegende Platte, die längs der imaginären Achse $i \cdot \mathbb{R}$ versteift sei. Für Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$ ergibt eine Gleichgewichtsbetrachtung die Übergangsbedingungen

$$h[\tau_{yx}^{+} - \tau_{yx}^{-} + i(\sigma_x^{+} - \sigma_x^{-})] + \frac{d}{dy} N + X + iY = 0 \quad \text{auf} \quad i \cdot \mathbb{R} .$$

Aus der Stetigkeit des Verschiebungsvektors auf $i \cdot \mathbb{R}$ folgt

$$u^{+} + i v^{+} = u^{-} + i v^{-} \quad \text{auf} \quad i \cdot \mathbb{R} .$$

Weiter gelten Abklingbedingungen für $|z| \to \infty$.

Mit Hilfe einer geeigneten Abbildung kann man das Problem in ein Transmissionsproblem für stückweise holomorphe Funktionen in $\mathbb{C}$ mit Unstetigkeiten auf $i \cdot \mathbb{R}$ überführen. Unter geeigneten Voraussetzungen über die Daten erfüllen diese Funktionen a-priori-Abschätzungen , welche der Semi-Fredholmeigenschaft des Problems äquivalent sind. Hieraus folgt die Existenz einer Lösung. Für konstante Vorgaben ist die Lösung eindeutig, sie läßt sich explizit angeben und erlaubt die Berechnung von σ_x, σ_y, τ_{yx} durch Rücktransformation.

G. Buggle: Lösung der Laplace- und Holmholtzgleichung bei gemischten verallgemeinerten Randvorgaben mit der Kantorovich-Lebedev- und der Mehler-Fok-Transformation.

Nach einer kurzen Schilderung des verwendeten allgemeinen Lösungsverfahrens anhand zweier Beispiele wird eine verallgemeinerte Kantorovich-Lebedev-Integraltransformation eingeführt und diskutiert. Damit werden dann die anfangs erwähnten Randwertprobleme in "Keil-" bzw. "Kegelgebieten" gelöst.

Der zweite Teil des Vortrags beschäftigt sich mit der verallgemeinerten Mehler-Fok-Integraltransformation und der Lösung von Problemen, wo die verallgemeinerten Randwerte auf Kugelkalotten bzw. auf Rotationshyperboloidschalen angenommen werden.

Anschließend wird noch auf einige weitere Probleme im Zusammenhang von Randwertaufgaben und Integraltransformationen eingegangen.

B. Kawohl: Nichtlineare gemischte Randwertprobleme für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf Gebieten mit Ecken.

Betrachtet wird das Randwertproblem

$$Lu = f \quad \text{in} \quad \Omega \,, \qquad -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta_i \quad \text{auf} \quad \Gamma_i \,,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glatten Rand $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ist.

L ist ein linearer, gleichmäßig stark elliptischer Operator der Gestalt

$$Lu = - \Sigma D_i (a_{ij} D_j u) + a_o u$$

mit glatten Koeffizienten $a_{ij} = a_{ji}$ und $a_o \geq o$. Die Vorgabe f ist aus $L^2(\Omega)$. $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ bezeichnet die konormale Ableitung, und $\beta_i : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ sind (im allg. mehrwertige) maximal monotone Abbildungen.

Unter die hier betrachteten Randbedingungen fallen lineare, unilaterale und andere nichtlineare Randbedingungen. Der Vortrag enthält einen Existenzsatz für schwache Lösungen in $H^1(\Omega)$, der über Variationsmethoden hergeleitet wird, einen Eindeutigkeits- und einen Regularitätssatz.

R. Gorenflo: <u>Methoden zur Konstruktion konservativer Diskretisierungen.</u>

Bei Langzeitrechnungen (beispielsweise in der Wettervorhersage) ist es vorteilhaft, Diskretisierungen zu verwenden, die das Verhalten gewisser Funktionale der Lösung (etwa Masse, Energie, Vortizität) exakt imitieren. Zuerst werden die Methoden des variationellen Entwurfs eines Differenzenverfahrens für Anfangswertaufgaben mit Integralinvariante nach Y.K. Sasaki (1975) und die Methode der nachträglichen Korrektur nach Isaacson (1977) dargestellt. Dann werden am Modellproblem einer allgemeinen Diffusionsgleichung mit inhomogener natürlicher Randbedingung und mit natürlichen Interface-Bedingungen folgende Methoden vorgestellt: (a) konservative Total-Diskretisierung, (b) konservative Semi-Diskretisierung mit Galerkin-Ansatz (longitudinale Linienmethode). (c) Diskretisierung von (b) zusätzlich in der Zeit. Zwischen (a) und (c) werden Zusammenhänge aufgezeigt.

B. Steffen (Göttingen)