Math. Forschungsinstitut Oberwolfach
E 20 /01594

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 18 /1978

Geometrische Ordnungen

24.4 bis 28.4.1978

Die diesjährige Tagung über "Geometrische Ordnungen" stand unter der Leitung von Peter Scherk (Toronto). Dem Thema der geometrischen Ordnungen wurden schon 1967, 1970, 1972, 1974 und 1976 Tagungen gewidmet, aber nur in Verbindung mit dem Thema der konvexen Körper, 1976 mit dem der kombinatorischen Geometrie. Diesmal aber hatten wir die ganze Woche für unsere Themen allein zur Verfügung. Diese Gelegenheit wurde benutzt, um einen Überblick über neue Ergebnisse, nicht nur der letzten zwei sondern der letzten zehn Jahre, das heisst seit dem Erscheinen des Buches Haupt-Künneth: Geometrische Ordnungen, zu geben.

Die Vorträge und Referate der Tagung lassen sich in drei Themenkreise gliedern. Erstens Probleme bezüglich linearer Ordnungscharakteristiken: hierher gehören gelöste und ungelöste Probleme, die sich aus einer Vermutung von P. Scherk ergeben; „Halbdifferenzierbarkeit" die durch Raumelemente definiert ist; Verallgemeinerung eines Theorems von J. Helmslev; Klassifikation der ebenen Kontinua von der schwachen Ordnung Drei. Zweitens Probleme bezüglich ebener, durch je $k \geq 3$ Punkte bestimmten Ordnungscharkteristiken. Zu nennen sind Fortschritte bei den Problemen, die sich aus der Scherkschen Charakteristikentheorie ergeben und in der daraus resultierenden Theorie der Quasigraphen; Beweis, dass die Summe der K - Vielfachkeiten der K - singulären Punkte eines normalen Bogens von der K - Ordnung $k + 1$ maximal $k + 1$ ist; Verallgemeinerung von Sätzen von Bose, Jackson und

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

Mukhopadhyaya sowie des 2n - Scheitelsatzes von Jackson. Drittens Flächen dritter Ordnung in P^3 : Überblick über die Resultate von Juel und Marchaud; Klassifikation der Flächen, die nur endlich viele Geraden enthalten; Beschreibung dieser Flächen bezüglich ihrer elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Punkte. Weitere Themenkreise waren Nabelpunkte, Kugelkonvexität bijektiver 2 - mal stetig differenzierbarer Abbildungen im R^n und die ordnungsgeometrische Interpretation metrischer Geometrie.

Der Tagungsverlauf wurde trotz des anstrengenden Vortragsprogramms allgemein als sehr anregend empfunden.

Teilnehmer

G. Aumann, München
T. Bisztriczky, Calgary (Kanada)
O. Haupt, Erlangen
E. Heil, Darmstadt
N.D. Lane, Hamilton (Kanada)
R. Lingenberg, Karlsruhe
J. Schaer, Calgary (Kanada)
P. Scherk, Toronto (Kanada)
G. Spoar, Guelph (Kanada)
K. Strambach, Erlangen
J. Turgeon, Montreal (Kanada)
P. de Witte, Waterloo (Kanada)
T. Zamfirescu, Dortmund

Vortragsauszüge

DISCUSSION: Solved and unsolved problems concerning the curves of linear order n in R^n.

1) Scherk's conjecture on the rank numbers of differentiable arcs and curves and the partial solutions by Scherk himself, Derry, Turgeon and Park.

2) Hjelmslev's characterization of the curves of order n in R^n by means of the monotonic movement of its osculating hyperplanes.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

3) Semi-differentiability of curves defined by means of space elements which depend continuously on a parameter. A "space element" is a sequence: point $\subset$ line $\subset$ plane $\subset \ldots \subset$ hyperplane.

4) Otto Haupt outlines the results of a talk reported on separately.

G. AUMANN: <u>Kugelkonvexität bijectiver 2 - mal stetig differenzierbarer Abbildungen im R^n</u> .

Satz. Es sei $f : G \to R^n$ eine 2-mal stetig differenzierbare Abbildung der offenen Menge $G \subset R^n$ mit nirgends verschwindender Funktionaldeterminante. Dann ist f lokal kugelkonvex, d.h. jede hinreichend kleine Vollkugel K hat ein konvexes f - Bild.

<u>Beweis</u>. (I) Um jeden Punkt $x_o \in G$ gibt es eine offene Kugel K_o , so dass die Abbildung M mit $M(x_1,x_2) := f^{(-1)}(2^{-1}(f(x_1) + f(x_2)))$ für $x_1,x_2 \in K_o$ eindeutig erklärt ist; dabei ist $M \in C^2$ und es gilt $M = a + R$ mit $a := 2^{-1}(x_1+x_2)$ und $|R| < q|x_1-x_2|^2$ mit geeigneter Konstanten $q > 0$. (II) Für jede Kugel $K(r)$ vom Radius r gilt: Für $x_1,x_2 \in K(r)$ ist

$$\{x : x \in R^n \wedge |x - a| < |x_1 - x_2|^2 / 8r\} \subset K(r) .$$

(III) Wählt man nun $K(r) \subset K_o$ beliebig mit $r < 1/8q$, so gilt $2^{-1}(f(x_1) + f(x_2)) \in f(K(r))$ fur je zwei $x_1,x_2 \in K(r)$, was die Konvexität von $f(K(r))$ bewirkt. Hierzu sei noch bemerkt: (I) ergibt sich aus den Identitäten $M(x,x) = x$ und $M(x_1,x_2) = M(x_2,x_1)$ und der Taylorschen Formel für $M(x_1,x_2)$ mit den Entwicklungszentrum (a,a) und dem Restglied zweiter Ordnung R . (II) folgt aus dem Höhensatz im rechtwinkeligen Dreieck.

PROBLEM: Es sei $f : G \to R^n$ bijektiv und lokal kugelkonvex. Dann ist f stetig. Was für Differenzierbarkeitseigenschaften hat dabei f ?

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

T. BISZTRICZKY. Shapes of Surfaces of Order three.

Let F be a non-ruled (not generated by lines) surface of order three in the real projective three-space. Then F contains at most four non-differentiable points (nodes) and at most twenty-seven lines. A node of F is a unode, binode or conic node and a differentiable point, not lying on any line of F , is elliptic, parabolic or hyperbolic.

We assume that F contains exactly one node v . If v is a unode, the F contains exactly

1, 2, 3 or 6

lines. If v is a binode, then F contains exactly

1, 2, 3, 4, 6, 7, 10 or 15

lines.

We describe these surfaces by determining the existence and the distribution of the elliptic, parabolic and hyperbolic points of F . In general, the set of elliptic points is open in F , the set of parabolic points is nowhere dense in F and hyperbolic points always exist.

T. BISZTRICZKY. Surfaces of order three.

Brief survey of the history of surfaces of order three with emphasis on the cubics. Introduction of modern method of study based upon differentiability and the topology of the real projective three-space. List of main results and techniques obtained and description of some of these surfaces.

OTTO HAUPT. Bemerkung zu einem Satz von J. Hjelmslev.

J. Hjelmslev hat (vgl. Acta math. 87 (1952), 59-82) bewiesen den Satz.

Voraussetzung. Es sei C eine (einfache, geschlossene) Kurve im

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

projektiven P^n , $n \geq 3$, mit den Eigenschaften: (1) Es existieren keine n - Sekanten von C , d.h. durch je n Punkte von C geht genau eine Hyperebene. - (2) Es ist C lokal von der Ordnung n bezüglich des Systems k^{n-1} der Hyperebenen des P^n . - (3) Es ist C differenzierbar, d.h. in jedem Punkt von C existiert für jedes $\nu = 1,2,\ldots,n-1$, genau eine ν - dimensional Schmiegebene.

Behauptung. Es its C sogar global von der Ordnung n bezüglich k^{n-1} .

Es liegt die Vermutung nahe, dass der Satz von Hjelmslev auch gilt, wenn die Voraussetzung (3) nicht erfüllt ist. Im Falle $n = 3$ ist dies richtig (Vgl. Bayer. Akademie d. Wiss. Sitz. - Ber. 1953, math. - naturw. Kl 289-299). Vorgetragen wurde ein einfacherer (ebenfalls nur den Fall $n = 3$ erledigender) Beweis, der sich, wie zu vermuten, für beliebige $n \geq 4$ verallgemeinern lässt und bezüglich dessen anf eine spätere Veröffentlichung verwiesen werden muss.

E. HEIL. Bemerkungen über Nabelpunkte.

Was haben Nabelpunkte mit Ordnungsgeometrie zu tun?

1. Nach Darboux ist ein Flächenpunkt, durch den mehr als 10 5-punktig berührende Kreise gehen, ein Nabel. Dies gilt im Komplexen, so dass es fraglich ist, ob das eine ordnungsgeometrische Kennzeichnung der Nabel gibt.

2. Innerhalb eines Ovals gibt es Punkte, durch die 4 Normalen des Ovals gehen. Dies folgt z.B. aus der zyklischen Ordnung 4. Die Normalen einer Eifläche im E^3 besitzen eine Brennfläche. Diese hat Singularitäten, die den Nabeln entsprechen. Ihre typischen Formen heissen nach R. Thom hyperbolisch order-elliptisch. Nahe einer solchen Singularität gibt es Punkte, durch die 6 Normalen der Eifläche gehen. Daher gibt es innerhalb "fast aller" Eiflächen 6-Normalenpunkte. Wahrscheinlich gilt das für alle Eiflächen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

N.D. LANE: Four talks on Characteristic and Order.

Four examples of the relation between characteristic and order lead to the present investigation, by N.D. Lane, J.M. Turgeon and P. Scherk, of a general theory. These four studies involved linear, conformal, conic-sectional, and polynomial differentiability.

1. In the linear case, the characteristic curves are lines in the real affine plane. An arc A is differentiable at an interior point p of finite linear order if A has an ordinary tangent at p. The non-tangent lines through p all intersect A at p or all of them support. The point p is assigned a characteristic (a_o, a_1), where a_o and a_1 are equal to 1 or 2. The digit a_o is equal to 1 or 2 according as the non-tangent lines through p all intersect A at p or all support. The digit a_1 is then determined by the condition that $a_o + a_1$ is odd or even according as the tangent of A at p intersects or supports A at p. There are four kinds of differentiable points: (1,1), (1,2), (2,1), (2,2). The order of the point p is not less than $a_o + a_1$ and if p is elementary (thus there is a neighbourhand of p on A which is decomposed by p into two convex one-sided neighbourhoods) then the order of p is equal to $a_o + a_1$.

2. In the conformal case, the characteristic curves are circles in the conformal plane. An arc A is conformally differentiable at an interior point p of finite cyclic order if there is a tangent circle of A at p through each point Q different from p and an osculating circle at p. The non-tangent circles through p all intersect A at p or all of them support. The non-osculating tangent circles at p all intersect A at p or all of them support and in the cases where the osculating circle is not the point circle p, they all support. There are four kinds of points for which the osculating circle at p is not a point circle and four kinds for which it is the point circle p. These eight points have the characteristics

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(1,1,1), (1,1,2), (2,2,1), (2,2,2), $(1,1,2)_o$, $(1,2,1)_o$, $(2,1,1)_o$ and $(2,2,2)_o$. If (a_o,a_1,a_2) or $(a_o,a_1,a_2)_o$ is the characteristic of p, then the order of $\widetilde{p}$ is not less than $a_o + a_1 + a_2$ and if p is an elementary point, its order is equal to $a_o + a_1 + a_2$.

3. In the third example, the characteristic curves are non-degenerate conic sections in the projective plane. The arc A is differentiable at p if there are tangent conics of A at p , osculating conics, 4-osculating conics and a 5-osculating conics. The non-tangent conics through p [the non-osculating tangent conics at p ; the osculating conics which are not 4-osculating; the 4-osculating conics which are not 5-osculating]all intersect A at p or all of them support. The tangent conics are all non-degenerate. The osculating conics are either all non-degenerate (Type 1); or all consist of a pair of lines through p neither of which is the tangent of A at p (Type 2); or a pair of lines one of which is the tangent of A at p while the other does not pass through p (Type 3). The 4-osculating conics are either all non-degenerate (Type 1 a) or all consist of the tangent of A at p and another line through p (Type 1 b). The 5-osculating conic is non-degenerate (Type 1 ai) or the point p (Type 1 aii) or the double tangent of A at p (Type 1 aiii). There are ten kinds of differentiable points which are not cusps and ten kinds of cusp points. The non-cusp points have the characteristics (1,1,1,1,1;1 ai); (1,1,1,1,2;k) k = 1 ai , 1 aii , 1 aiii ; (1,1,1,2,1;1 b) (1,1,2,1,1,;k), k = 1 b, 2, 3 ; (1,2,1,2,2;2) and (1,1,1,1,2;3). If $(a_o,a_1,a_2,a_3,a_4;k)$ is the characteristic of p , then the order of p is not less than $\sum_o^4 a_j$; and if p is elementary, its order is equal to $\sum_o^4 a_j$.

4. The characteristic curves are the (oriented) graphs of polynomials (of degree at most n) in the affine plane in the last example. The arc A is differentiable at p if $\lim_{s \to p} K(s,p) = K(p^2)$ (the tangent line);

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

$\lim_{s \to p} K(s,p^2) = K(p^2)$ (the osculating parabola); ...; $\lim_{s \to p} K(s,p^i) = K(p^{i+1})$ all exist $(1 \leq i \leq n+1)$, where $i(= I(p)$, the index of $p)$

is the smallest integer such that $K(p^i)$ is a non-degenerate polynomial and $K(p^{i+1})$ is a line (or a ray of a line) through p parallel to the y - axis. If K_h is the set of all those polynomials which have h-point contact with $K(p^h)$ at p, then the polynomials of $K_h - K_{h+1}$ all intersect A at p or all of them support $(h = 1,2,...,n+1$; here $K_{n+2} = \emptyset)$. There are $6n + 2$ different kinds of differentiable points. If $(a_o, a_1, ..., a_n; I(p))$ is the characteristic of p then the order of p is not less than $\sum_{o}^{n} a_j$.

R. LINGENBERG: Bemerkung zur ordnungsgeometrischen Interpretation metrischer Geometrie.

Sei (V,Q) ein 3-dimensionaler metrischer Vektorraum über einem beliebigen Körper und $I(V,Q)$ die Inzidenzstruktur der nicht-isotropen Geraden über (V,Q). $I(V,Q)$ für $\dim V^{\perp} \leq 1$ lässt sich rein geometrisch charakterisieren wie folgt: Sei I eine Inzidenzstruktur mit mindestens einem Vierseit, in der jeder Punkt dreiseitverbindbar ist. Dann gilt $I \cong I(V,Q)$ mit geeigneten (V,Q), wenn es zu jeder Geraden $a \in I$ eine axiale Kollineation σ_a mit a als Achse gibt, sodass $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$ mit $d \in I$ genau dann gilt, wenn a,b,c kopunktal sind. Die Dreiseitverbindbarkeit der Punkte entspricht genau der ordnungsgeometrischen Forderung, dass die durch Q definierte Kurve (Nullstellengebilde) eine Kurve 2. Klasse ist. Das genannte Theorem beweist dann, dass die Kurve ein Kegelschnitt ist.

J. SCHAER: Juels grundlegende Arbeit über Elementarflächen dritter Ordnung.

1. Voraussetzungen; F^{III} habe überall eine stetige Tangentialebene; jeder ebene Schnitt ist eine Kurve dritter Ordnung, jeder ebene Schnitt und jeder

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Umriss ist eine Elementarkurve ohne Geradenstücke oder Winkelpunkte. F^{III} enthält keine „zusammenfallenden" und keine „singulären" Geraden.

2. Methoden: Betrachtung der ebener Schnitte, insbesondere der Tangentialebenen, und des Umrisses aus Punkten der Fläche. Untersuchung der singulären Punkte, Paritätsbestimmung mit Beachtung geeigneter Multiplizitäten.

3. Resultate: Jede F^{III} enthält mindestens eine Gerade, ja sogar mindestens drei koplanare Geraden. Ist F^{III} keine Regelfläche, enthält sie höchstens 27 Geraden. In der Tat enthält sie entweder 3, 7, 15 oder 27 Gerade.

Marchaud hat unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen allgemeinere Resultate erhalten. Bisztriczky arbeitet under wieder leicht verschärften Annahmen neue Einzelheiten und Flächentypen aus.

G. SPOAR: <u>Normal Arcs and Curves of K-Order $k + 1$.</u>

Let K be a k-parameter family of order-characteristic curves in the projective plane satisfying the axioms of Haupt-Künneth. Multiplicities can be introduced for K-singular points of normal arcs and curves of K-order $k + 1$. Methods similar to the contraction-expansion processes of Haupt-Künneth can be used to study the following conjectures:

a) The sum of the K-multiplicities of the K-singular points on normal arcs and curves of K-order $k + 1$ is at most $k + 1$.

b) The sum of the K-multiplicities of the K-singular points on normal curves of K-order $k + 1$ is exactly $k + 1$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

JEAN TURGEON: Les quasigraphes.

La théorie des quasigraphes est présentée comme une synthèse des différents cas de différentiabilité directe exposés auparavant par N.D. Lane. Il s'agit des fondements d'une théorie étudiée par Peter Scherk, N.D. Lane et Jean Turgeon. Dans le disque unité G contenu dans le plan euclidien, un quasigraphe $K = ([K], K^1, K^{-1})$ est constitué d'un ensemble de points $[K]$ sur des "arêtes" (des arcs de Jordan) qui se rencontrent en des "sommets" et de deux ensembles K^1 et K^{-1}, qui constituent le complément de $[K]$ dans G. Des familles isotopes de quasigraphes sont définies, qui se croisent ou se touchent en un point P et divisent G en un nombre constant de régions.

Jean Turgeon
Montréal, Kanada

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©