# MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t  20|1978



## Konstruktive Verfahren der Optimierung bei graphentheoretischen und kombinatorischen Problemen

7.5. bis 13.5.1978

Die Tagung stand unter der Leitung von L. Collatz (Hamburg), G. Meinardus (Siegen) und W. Wetterling (Enschede).

Optimierungsprobleme aus der Graphentheorie und Kombinatorik haben in neuerer Zeit innerhalb und ausserhalb der Mathematik, in Natur- und Wirtschaftswissenschaften, in der Technik und in vielen anderen Gebieten Anwendungen gefunden. Es erschien daher zweckmässig, die vielen theoretischen und praktischen Fragestellungen auf einer Oberwolfach-Tagung zu behandeln.

Das Vortragprogramm gab den zahlreichen Teilnehmern aus dem In- und Ausland einen guten Überblick über die in den letzten Jahren erreichten Ergebnisse, über noch zu lösende Probleme und offene Fragestellungen. Mehr als bei früheren Tagungen stand der Gesichtspunkt der Komplexität im Vordergrund: Die Konstruktion effektiver polynomialer Algorithmen und die Frage nach guten approximativen Verfahren bei NP-Problemen.

Die praktischen Anwendungen wurden behandelt in Vorträgen über Probleme aus der Mechanik, Unternehmensforschung, Standortplanung, Codierungstheorie und über Computernetzwerke und Compilerbau.

Einen wesentlichen Beitrag zum Gelingen der Tagung leisteten die Mitarbeiter des Instituts durch die ausgezeichneten Betreuung und ihr grosses Verständnis für die Wünsche der Tagungsteilnehmer. Besonderer Dank gilt dem Leiter des Forschungsinstituts, Herrn Professor Dr. Barner.

Teilnehmer

Aigner, M. (Berlin)
Anselone, Ph.M. (Hamburg)
Bachem, A. (Bonn)
Blatt, H.-P. (Mannheim)
Bredendiek, E. (Hamburg)
Burkard, R.E. (Köln)
Collatz, L. (Hamburg)
Ebert, J. (Osnabrück)
Eckhardt, U. (Aachen)
Ehrhart, E. (Strasbourg)
Fleischmann, B. (Hamburg)
Freko, A. (Siegen)
Glashoff, K. (Hamburg)
Göbel, F. (Enschede)
Goerisch, F. (Clausthal-Zellerfeld)
Grötschel, M. (Bonn)
Grothkopf, U. (Hamburg)
Halin, R. (Hamburg)
Harari, F. (Ann Arbor)
Heise, W. (München)
Henn, R. (Karlsruhe)
Heyden, W.P.A. van der (Delft)
Hoede, C. (Enschede)
Jongen, H.Th. (Enschede)
Knauer, B. (Würzburg)
Köhler, E. (Hamburg)
Korte, B. (Bonn)
Krafft, O. (Aachen)
Kubik, K.K.Th. (Rijswijk)
Lempio, F. (Bayreuth)
Liebe, B. (Siegen)
Mehlhorn, K. (Saarbrücken)
Meinardus, G. (Siegen)
Mensch, T.C.A. (Delft)
Minty, G.J. (Bloomington)
Oettli, W. (Mannheim)
Opfer, G. (Hamburg)
Späth, H. (Oldenburg)
Töpfer, H.J. (Berlin)
Turgeon, J. (Montreal)
Wetterling, W. (Enschede)
Zimmermann, U. (Köln)

## Vortragsauszüge

### A. Bachem: Polynomial algorithms for computing the Smith and Hermite normal forms of an integer matrix

Recently, Frumkin pointed out that none of the well-known algorithms that transform an integer matrix into Smith or Hermite normal form is known to be polynomially bounded in its running time. In fact, Blankinship noticed - as an empirical fact - that intermediate numbers may become quite large during standard calculations of these caronical forms. Here we present new algorithms in which both the numbers of algebraic operations and the number of (binary) digits of all intermediate numbers are bounded by polynomials in the length of the input data (assumed to be encoded in binary). These algorithms also find the multiplier-matrices K, U' and K' such that AK and U'AK' are the Hermite and Smith normal forms of the given matrix A. This provides the first proof that multipliers with small enough entries exist.

### R.E. Burkard, K. Scholz: Über eine Klasse allgemeiner Schedulingsprobleme

Wir betrachten folgende Klasse von Schedulingsproblemen:
n Aufgaben sollen unter Berücksichtigung technologischer Nachfolgebeziehungen auf m gleichen Maschinen bearbeitet werden. Wir diskutieren verschiedene Zielfunktionen, die auf der Fertigstellungszeit und der Maschinenausnutzung beruhen, und zeigen, dass sie sich auf einen Zielfunktionstyp zurückführen lassen. Diese "algebraische" Zielfunktion enthält zahlreiche weitere Spezialfälle von praktischem Interesse. Zur lösung des Schedulingsproblems mit algebraischer Zielfunktion werden untere Schranken abgeleitet, die durch das Lösen algebraischer Transportprobleme gewonnen werden können. Ferner wird über einige Rechenerfahrungen mit diesen Problemen berichtet.

L. Collatz: Typen von Hypergraphen innerhalb und ausserhalb der Mathematik

Es werden 6 Typen von Hypergraphen betrachtet:

- I Ungerichtete Hypergraphen
- II Hypergraphen mit Reihung
- III " " Halbordnung
- IV Hyperdigraphen mit unwesentlicher Ordnung
- V " " sinnvoll interpretierbarer Ordnung
- VI " " für das Problem wesentlicher Ordnung

Für alle Typen werden Beispiele innerhalb und ausserhalb der Mathematik gegeben. Für I werden u.a. geometrische Konfigurationen aus der Geometrie der Ebene und des 3-dimensionalen Raumes genannt (Anordnungen von Punkten, Kreisen, Ebenen, Kugeln), für II Landkarten (mit dualem Hypergraph), U-Bahn Streckennetze u.a., für III Beispiele aus der Approximationstheorie, für IV und V geometrische "Vorgänge" (z.B. Tangenten an mehrere Kreise von einem sich auf einer Geraden bewegenden Punkte aus) und Verzweigungen bei nichtlinearer Gleichungssystemen und Integralgleichungen, und für VI Fabrikationsplanung, Potenzbilder von nichtabelschen Gruppen von Decktransformationen, Verzweigungsdiagramme und Stabilität bei Lösungen von Differentialgleichungen.

J. Ebert: Eine Digraphen-Erweiterung

Durch Übertragung der Herleitung des Hypergraphen-Begriffs aus dem Graphenbegriff auf den gerichteten Fall wurde gezeigt, dass sich Netze, die den Petri-Netzen nah verwandt sind, zu den Digraphen verhalten wie Hypergraphen zu Graphen. Ein Netz in diesem Sinne ist ein Tupel $(V,E,\phi)$ mit Mengen $V,E$, $V \cap E = \emptyset$ und $\phi: E \to (P(V)\setminus\{\emptyset\})\times(P(V)\setminus\{\emptyset\})$.

J. Ebert: Endliche Church-Rosser-Operatoren auf Graphen

Zur Untersuchung von Algorithmen auf Graphen, die aus wiederholter Anwendung von bedingten Veränderungen bestehen, wird der Begriff des

Graphenoperators OP = (B,T) auf einer Parametermenge P und einer Graphenmenge G dadurch definiert, dass B: P×G → {0,1} eine Bedingung und T: P×G → G eine Transformation ist. Der Nachweis der enlichen Church-Rosser-Eigenschaft solcher Operatoren kann dann durch Ausrechnen dreier elementarer Gleichungen geführt werden, was bei Verwendung eines Booleschen Matrizen-Kalküls in einfacher Weise möglich ist.
Als Anwendung wurde gezeigt, dass für die Bestimmung des Intervallgraphen eines Flussgraphen durch Betrachtung eines Graphenoperators ein neuer einfacher Algorithmus herleitbar ist.

U. Eckhardt: Stabwerke

Stabwerke sind die einfachsten Gebilde, die in der technischen Mechanik auftreten. Beispiele sind Kräne, Gittermasten, Brücken, Fachwerke oder Seilnetzwerke von der Art des olympischen Zeltdachs in München. Mathematisch hat man das Problem, auf einem Graphen ein nichtkonvexes Funktional zu minimieren, wobei der Graph "viele" Knoten hat (10.000 beim Olympiazeltdach). Es wird untersucht, welche besonderen graphentheoretischen Strukturen bei solchen Stabwerken vorliegen und auf welche Weise man diese bei der praktischen Berechnung ausnutzen kann.

E. Ehrhart: Eine einfache Methode für das Partitionsproblem

Im System $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = n$, $x_i \geq 0$ sind die $a_i$ ganz und positif. Die Anzahl $j_n$ seiner ganzzahligen Lösungen ist die Summe eines Pseudopolynoms $Q_n$ mit periodischen Koeffizienten und eines Polynoms $P_n$, dessen Glieder höheren Grades sind als $Q_n$. Man gibt den Ausdruck von $P_n$ und eine bequeme Berechnungsweise für $Q_n$. Sind die $a_i$ paarweise teilerfremd, so beschränkt sich $Q_n$ auf eine periodische Zahl. Die Anzahl $i_n$ der ganzen Lösungen von $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = n$, $x_i > 0$ erhält man sofort durch das Reziprozitätsgesetz $i_n = (-1)^{r-1} j(-n)$.
Unsere "Methode der unbestimmten periodischen Koeffizienten" vermeidet die umständliche erzeugende Funktion und besteht wesentlich in der Lösung eines einfachen linearen Gleichungssystems.

B. Fleischmann: Eine Schnittstelle zwischen Standardplanung und Tourenplanung

Ein System zur Warenverteilung ist ein zyklenfreier Digraph mit den Fabriken als Quellen, den Kundenorten als Senken und den Zentrallagern oder Lagern als Zwischenknoten. Zur Minimierung der Transport- und Lagerhaltungskosten dieses Systems sind die Lagerstandorte aus vorgegebenen potentiellen Standorten auszuwählen sowie die zugehörigen Lieferwege zu bestimmen. Für feste Standortstruktur ergibt sich ein nichtlineares mehrstufiges Transportproblem, das sich mit den bekannten Verfahren für den linearen Fall iterativ näherungsweise lösen lässt Die Transportkosten für die Pfeile "Lager-Kundenort" hängen jedoch von den Ausliefertouren ab, die i.a. mehrere Orte verbinden. Da eine simultane Optimierung der Systemstruktur und aller Touren im System nicht möglich erscheint, müssen aus der Annahme über bestimmte Tourenformen Kostenfunktionen für das Transportproblem abgeleitet werden.

F. Göbel, C. Hoede: An optimality property of ternary trees

Let S be a finite set, $P \in S$. Consider the following recursive algorithm to find P.

```
procedure find (P,S);
if |S| = 1 then output P
else begin choose u;
           partition S into S_1,...,S_u;
           determine j such that P ∈ S_j;
           find (P,S_j)
     end
```

The "effort" involved in one call of this procedure is assumed to be a non-negative non-decreasing function e of u only; the effort $E(P)$ to find P is defined as the sum of the efforts at the successive steps. The effort $E(T)$ of the procedure is defined as the average (or sum) of the efforts $E(P)$ over all $P \in S$.
Our problem is to determine $\epsilon(N)$, i.e. the minimum of $E(T)$ over all procedures. A solution is presented for $e(u) = u$. For general e, sufficient conditions are given to eliminate certain values of u. These conditions are applied to 4 special choices for e. We conclude with a conjecture and a generalization to weighted averages.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

M. Grötschel: Über das symmetrische Travelling Salesman Problem

Dem symmetrischen Travelling Salesman Problem wird ein Polytop $\tilde{Q}_T^n$ zugeordnet, der die Eigenschaft hat, dass das TSP als lineares Program über $\tilde{Q}_T^n$ gelöst werden kann. Es wird gezeigt, dass die trivialen Ungleichungen, die Kurzzyklusbedingungen, die 2-Matching Ungleichungen und die Kamm-ungleichungen Facetten dieser Polytopen sind. Obwohl die Anzahl dieser Facetten unvorstellbar gross ist, reichen die genannten Ungleichungen nicht aus, $\tilde{Q}_T^n$ vollständig zu charakterisieren. Es wird nachgewiesen, dass hypohamiltonsche und hypokettenhamiltonsche Graphen geometrische Gründe für die hohe Komplexität des TSP liefern, da gewisse Klassen dieser Graphen Facetten von $\tilde{Q}_T^n$ induzieren aber die Nachfrüfung dieser Tatsache schwieriger als das TSP selbst ist. Trotz dieser negativen Resultate kann demonstriert werden, dass sich die gefunden Facetten effizient in LP-Schnitt-ebenen-Verfahren verwenden lassen. Die Lösung eines 120-Städte Problems mit diesen Methoden wird angegeben.

R. Halin: Über abzählbare ebene Graphen

Es werden einige grundsätzliche Probleme in Zusammenhang mit der Einbettung abzählbarer Graphen in die Ebene erörtert, insbesondere im Hinblick auf die prinzipiellen Unterschiede zum endlichen Fall. Wichtigstes Resultat: Charakterisierung der abzählbaren ebenen Graphen (durch verbotene Konfigurationen), die eine gegebene Mindestzahl (im Sinne von Mächtigkeit) von Häufingspunkten bei allen ihren Einbettungen besitzen.

F. Harary: Graphical Constructions in Generalized Ramsey Theory and Isomorphic Factorizations

The development of Generalized Ramsey Theory for graphs begins with Ramsey's original theorem for countably infinite graphs and the classical ramsey numbers $r(K_m,K_n)$ for complete graphs. This naturally generalizes to the ramsey numbers $r(F,H)$ of two graphs with no isolated points and

the diagonal ramsey numbers $r(F) = r(F,F)$.
It was observed that the construction in the conventional proof of $r(K_3) = 6$ contains that of $r(K_{1,3}) = 6$ as a subproof and has that of $r(G) = 6$ as a superproof. The theory was then traced by introducing the ramsey multiplicity of a graph, the ramsey numbers of digraphs and of uniform hypergraphs, of multigraphs and networks, and the size ramsey number of a graph. These are in joint papers with Chvátal, Prins, Hell, Duke, Schwenk, Miller and Robinson.
The development of the isomorphic factorization of graphs was given for complete graphs and complete multipartite graphs. The proof of the Divisibility Theorem for complete graphs was illustrated by deriving one-third of $K_6$ using the pair-group of the symmetric group in an explicit construction. The representation of combinatorial designs as isomorphic factorizations was indicated. This series of papers is joint with Robinson, Wormald and Wallis.

W. Heise: Existence problems of optimal codes

Theorem: there is no optimal $(n+2,4)$-code of order $n \equiv 4 \bmod 6$.

Refernce: Werner Heise, Theoremi di non esistenza di codici ottimali e m-strutture di Laguerre.
To appear in Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Módena.

W.P.A. v.d. Heyden, K.K.Th. Kubik, T.C.A. Mensch:

Some results in Computer Network Optimization

One of the problems in computer network optimization can be formulated as a general location/network flow problem. The problem with given topology and capacities of the links turns out to be a multi-commodity network flow problem with a nonlinear objective function, the so called Delay function. After an expose of the computer network of the Ministry of Public Works of the Netherlands a short formulation of the method for solving such a problem is given. The method is Flow Deviation Method, based upon the steepest descent principle. Some results of the simulation of the network are given.

C. Hoede: Die Zwiebelstrukturen einiger Klassen von kombinatorischen und graphentheoretischen Problemen

Es wird darauf hingewiesen, dass Probleme wie das Set Packing Problem, das Set Covering Problem oder die Beantwortung der Frage ob ein Graph Hamiltonisch ist für gegebene Werte von Parametern, wie die Dimensionen der Matrizen in den beiden ersten Problemen oder die Anzahl der Ecken in dem dritten Problem, Zwiebelartige Aufteilungen sämtlicher den Parameterwerten entsprechenden Problemen zulassen.

Es werden Beispiele für diese Probleme gegeben woraus sich ergibt, dass mehrere natürliche Zwiebelstrukturen für eine Problemklasse existieren. Der Beitrag befasst sich hauptsächlich mit der Frage welche Struktur für ein Problem am natürlichsten zu nennen ist vom Standpunkt des Praktikers beziehungsweise vom Standpunkt des Theoretikers aus betrachtet.

H.Th. Jongen, F. Twilt: On the problem of finding several local minima.

We consider finite dimensional optimization problems.
First we show how the ideas of Morse theory can be used to detect relevant features of the structure of these problems. Then we consider generic homotopies of the object function and their use in optimization. Here, due to inequality constraints, we encounter a new problem of global nature. Finally we study homotopies of special structure for practical applications and discuss genericity aspects of them.

B. Knauer: Ein einfaches Matching-Algorithmus

Es wird ein Algorithmus zur Konstruktion augmentierender Wege in beliebigen Graphen $G = (V,E)$ mit einem partiellen Matching vorgestellt. Der Algorithmus beruht auf "depth-first-search" und kontrakiert sukzessive Tripel von Knoten. Das Kontrakieren und Expandieren von "Blüten" im Sinne von Edmonds wird vermieden.
Die alternierenden Wege werden im wesentlichen schon während der Suche definiert. Die Komplexität ist $O(|V|(|V|\log|V|+|E|))$ für die Konstruktion eines maximalen Matching.

B. Korte: Approximative Algorithmen für kombinatorische Optimierungsprobleme

Sei E eine endliche Menge, $S \subseteq P(E)$ eine Mengenfamilie mit subklusiver Eigenschaft, d.h. $s_1 \subseteq s_2 \in S \Rightarrow s_1 \in S$; $c: E \to \mathbb{R}^+$, die auf P(E) wie folgt erweitert wird: für $s \subseteq E$ gilt $c(s) = \sum_{e \in s} c(e)$. Sei B die Menge der maximaler Elemente von S. Dann ist

$\max_{s \in S} c(s)$ bzw. $\min_{s \in B} c(s)$ die allgemeine Form eines kombinatorischen Optimierungsproblems. Da sehr viele dieser Probleme NP-vollständig sind, d.h. es (bisher) keiner polynomialen Algorithmus für sie gibt, interessiert man sich bei diesen Problemen, ähnlich wie sonst in der Numerik, für approximative Algorithmen. Dies sind Algorithmen, die für genau definierte Problemklassen eine Fehler schranke (Gütegarantie) einhalten. In dieser Arbeit werden einige approximative Algorithmen für die oben genannten Optimierungsprobleme untersucht. Insbesondere werden zentrale Aussagen über den Greedy-Algorithmus gemacht. Es zeigt sich, dass bei gleicher Komplexität Algorithmen vom Greedy-Typ viele andere (auch kompliziertere) Algorithmen hinsichtlich der Gütegarantie dominieren.

O. Krafft: Etüden zur nicht-linearen ganzzahligen Optimierung

Zu den Problemen der statistischen Versuchsplanung gehört die Effiziensoptimierung der Auswertungsverfahren (Tests, Schätzer) durch Wahl der Beobachtungshäufigkeiten bei allen möglichen Versuchsbedingungen. Anhand dreier Beispiele aus diesem Bereich werden erläutert:

(1) Ein Theorem von N. Gaffke über die Lösungsmenge einer Klasse konvexer ganzzahliger Optimierungsaufgaben.

(2) Eine Verschärfung der Isotonie der t-Mittel für das beschränkte Zahlengitter.

(3) Eine möglichkeit, durch Modifikation der Zielfunktion die Menge der zulässigen Lösungen zu linearisieren.

K.K.Th. Kubik: Ein Produktionsproblem im Bergbau

Es wird die Aufgabe betrachtet, die Kwalität der wöchentlichen Produktionsmengen durch geeignete Wahl der zugänglichen Produktionsblöcke innerhalb von vorgegebenen Schranken zu halten. Gegeben sei also ein Feld von Blöcken mit Werten $|Z_\alpha| = 0,1,2,3$, welche Werte mit gleicher Häufigkeit auftreten. Die Aufgabe ist dann, jeweils 3 zugängliche Blöcke zu gewinnen, welche der Bedingung genügen $|Z_i+Z_j+Z_k| \leq 1$; oder falls dies nicht möglich ist, die Anzahl der Überschreitungen $|Z_i+Z_j+Z_k| > 1$ im Produktionsprocess zu minimieren.

K. Mehlhorn: Codes: Ungleiche Warscheinlichkeiten, ungleiche Buchstabenkosten

Gegeben sind n Wahrscheinlichkeiten $p_1,\ldots p_n$ und p Buchstaben. Die Buchstaben haben Kosten $c_1,\ldots,c_p$. Gesucht ist eine Präfixcode von minimalen Kosten.

Dieses Problem geht bis an die Anfänge der Codierungstheorie zurück; für Spezialfälle sind effiziente Lösungsalgorithmen bekannt (etwa $c_1 = c_2 = \ldots = c_p$ oder $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$). Für das allgemeine Problem sind nur sehr aufwendige Methoden bekannt.

Es gilt nur aber:

Satz: Seien $C_{opt}$ die Kosten des optimalen Kodes, sei c so gewählt, dass $\sum_{i=1}^{p} 2^{-cc_i} = 1$ und sei $\mu = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ die Entropie der Verteilung. Dann gibt es einen Kode mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für die Kosten C des Kodes gilt:

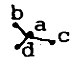
$$\frac{1}{c} \cdot H \leq C_{opt} \leq C \leq \frac{1}{c}(H+1) + \max_{1\leq i\leq p} c_i$$

(Verallgemeinerung des Codierungstheorems).

(2) Der Kode kann in Zeit $O(p\cdot n)$ konstruiert werden.

G.J. Minty: Maximale unabhängige Knotenpunktmengen in krallenfreien Graphen

In einem (endlichen, ungerichteten) Graphen heisst eine Menge von Knotenpunkten unabhängig wenn keine zwei von der Menge durch eine Kante verbunden sind. Ein Graph heisst krallenfrei wenn er keinen Teilgraph wie




(Kralle mit drei Zehen) enthält - d.h."wenn $a \sim b$, $a \sim c$, $a \sim d$, dann $b \sim c$ oder $b \sim d$ oder $c \sim d$".

Ein Algorithmus wird geschildert, der eine maximale (im Sinne von Potenz) unabhängige Knotenpunktmenge erzeugt. Die Anzahl der Iterationen ist dabei polynomiell begrenzt, d.h., es existiert ein Polynom $P(n)$ (hier ist n die Anzahl der Knotenpunkte) $\geq$ die Anzahl der Iterationsschritten.

Der Algorithmus lässt sich auch auf krallenfreie Graphen "mit Gewichten an den Knotenpunkten" anwenden, wobei "maximal" entsprechenderweise zu verstehen ist.

H. Späth: Klassenweise diskrete Approximation

Ausgehend von praktischen Beispielen aus der Mikro- und Makroökonomie wird die Relevanz des folgenden kombinatorischen Optimierungsproblems gezeigt:
Gegeben sei ein Modell $y = f(a_1,\ldots,a_p,x_1,\ldots,x_n)$ mit unabhängigen Variablen $x_1,\ldots,x_n$ und Parametern $a_1,\ldots,a_p$ und ferner m Zahlen-$(n+1)$-Tupel $(y_i,x_{ij}$ $(i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m)$. Gesucht ist eine Partition $C_1,\ldots,C_k$ der Länge k der Menge $M = \{1,\ldots,m\}$ mit der Nebenbedingung $|C_h| \geq p$ $(h = 1,\ldots,k)$ und k Parametersätze $a_1^h,\ldots,a_p^h$ mit

$$\sum_{h=1}^{k} \sum_{i\in C_h} (y_i - f(a_1^h,\ldots,a_p^h,x_{i1},\ldots,x_{in}))^2 \to \min.$$

Spezialisierungen und Verallgemeinerungen dieser Problemstellung werden betrachtet. Heuristische Lösungsverfahren für näherungsweise lösbare Ersatzprobleme werden angegeben und an numerischen Beispielen vorgeführt.

J. Turgeon: Relation between quasigraphs and differentiability

Four examples of the relation between characteristic and order lead to the present investigation, by Norman D. Lane, Peter Scherk and Jean Turgeon, of a general theory. These four studies involved linear, conformal, conic-sectional and polynomial differentiability. The present attempt at a generalization is done by means of the notion of quasigraph. In the unit disk G in the Euclidean plane, a quasigraph $K = ([K], K^1, K^{-1})$ consits of a set [K] of the points of "edges", some of them meeting at "vertices", and of two stes, $K^1$ and $K^{-1}$, whose union is the complement of [K] in G. We define isotopic families of quasigraphs. These families are used in the successive steps of the definition of our differentiability assumption.

U. Zimmermann: Dualitätsprinzipien und algebraische Transportprobleme

Das algebraische Transportproblem (ATP) ist ein Transportproblem (TP) mit einer verallgemeinerten Zielfunktion, die sowohl das gewöhnliche Summen-TP als auch das Zet-TP umfasst. Die Subsumierung dieser und weiterer relevanter Zielfunktionen unter eine gemeinsame algebraische Zielfunktion mit Werten in einer angeordneten, Kommutatieven Halbgruppe ermöglicht eine einheitliche Diskussion von Dualitätsprinzipien, die dem Dualitätssatz in der Linearen Optimierung entsprechen. Darüberhinaus findet sich ein praktisches Optimalitätskriterium für ein allgemeines primales Verfahren zur Lösung des ATP.

U. Grothkopf (Hamburg)
H.Th. Jongen (Enschede)