MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 7/1979

"Mehrdimensionale konstruktive
Funktionentheorie"
4.2.1979-10.2.1979

Zum zweiten Mal *) fand in Oberwolfach eine Tagung über "Mehrdimensionale konstruktive Funktionentheorie" statt, die von Walter Schempp (Siegen) und Karl Zeller (Tübingen) geleitet wurde.

Das Interesse in- und ausländischer Wissenschaftler an dem Thema dieser Tagung war so groß, daß leider nicht alle Teilnahmewünsche berücksichtigt werden konnten. Unter den 48 Mathematikern aus 9 Ländern - Belgien, Deutschland, England, Frankreich, Israel, Niederlande, Österreich, Schweiz, USA - kam ein sehr anregender Austausch wissenschaftlicher Ideen und Ergebnisse zustande.

Bei der Zusammenstellung des Vortragsplanes wurde versucht, die einzelnen Vortragsthemen nach gemeinsamen Gesichtspunkten zu ordnen und Schwerpunkte zu bilden. Einen solchen Schwerpunkt stellt gegenwärtig das Studium mehrdimensionaler Splines dar; weiter zu nennen sind Untersuchungen zur mehrdimensionalen Polynominterpolation und -approximation. Mehrere Vorträge befassten sich mit Methoden der Fehlerabschätzung bei der mehrdimensionalen Interpolation. Die numerische Kubatur wurde ebenfalls intensiv behandelt. Verschiedene Vorträge aus Randgebieten der mehrdimensionalen Approximation - z.B. par-

---

*) Vgl. "Constructive Theory of Functions of Several Variables" (Oberwolfach 1976). Proceedings. Edited by W. Schempp and K. Zeller. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 571. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977 .

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

tielle Differentialgleichungen, positive Operatoren - rundeten die Thematik ab.

Zum Erfolg der Tagung trug die hervorragende Betreuung durch die Mitarbeiter des Institutes bei. Dafür sei allen Angehörigen des Institutes herzlich gedankt.

Teilnehmer

G. Baszenski (Bochum)
U. Bernutat (Bochum)
K. Böhmer (Karlsruhe)
H. Brakhage (Kaiserslautern)
H. Brass (Braunschweig)
B. Brosowski (Frankfurt/M.)
P. Chenin (Grenoble, Frankreich)
W. Dahmen (Bonn)
F.J. Delvos (Siegen)
F. Deutsch (Frankfurt/M.)
B. Dreseler (Siegen)
J. Duchon (Grenoble, Frankreich)
H. Engels (Aachen)
A. Freko (Siegen)
D.C. Handscomb (Oxford, England)
W. Haussmann (Duisburg)
G. Heindl (München)
A. Jakimovski (Tel-Aviv, Israel)
K. Jetter (Hagen)
P.J. Laurent (Grenoble, Frankreich)
F. Locher (Hagen)
G. Meinardus (Siegen)
J. Meinguet (Louvain-la-Neuve, Belgien)
Ch. A. Micchelli (Yorktown Heights, U.S.A.)

H. Möller (Hagen)
G. Neumann (Siegen)
W. Niethammer (Karlsruhe)
G. Opfer (Hamburg)
F. Pittnauer (Duisburg)
H. Posdorf (Bochum)
P. Pottinger (Duisburg)
M. Reimer (Dortmund)
A. Sard (Basel, Schweiz)
W. Schäfer (Siegen)
W. Schempp (Siegen)
K. Scherer (Bonn)
R. Scherer (Tübingen)
W. Schlöglmann (Linz, Österreich)
H.J. Schmid (Erlangen)
R. Schnabl (Wien, Österreich)
A. Schönhage (Tübingen)
L. Schumaker (Berlin)
F. Schurer (Eindhoven, Niederlande)
F.W. Steutel (Eindhoven, Niederlande)
M. Stieglitz (Karlsruhe)
H. Strauss (Erlangen)
U. Tippenhauer (Kaiserlautern)
K. Zeller (Tübingen)

Vortragsauszüge

G. Baszenski: Boolesche Methoden bei der zweidimensionalen Hermite-Interpolation

MELKES definierte 1972 eine Klasse 2-dimensionaler Reduzierter Hermite-Elemente durch Angabe von Interpolationsdaten und Polynomräumen der Interpolanten. Die Interpolationsdaten sind in den Ecken des Definitionsrechtecks symmetrisch angeordnet. Dies hat zur Folge, daß der Genauigkeitsgrad (=Maximalgrad der exakt interpolierten Polynome) der Melkes-Elemente stets ungerade ist.

WATKINS und LANCASTER definierten 1977 eine weitere Klasse Reduzierter Hermite-Elemente mit geradem Exaktheitsgrad, welche diese Lücken auffüllen. Diese Elemente sind definiert durch Angabe der Interpolationsdaten und Polynomräume, die eindeutige Interpolation gewährleisten. Für diese Polynomräume wird eine explizite Darstellung hergeleitet. Ferner werden für die Interpolanten mit Booleschen Methoden Darstellungsformeln hergeleitet.

K. Böhmer: Fehlerasymptotik für lineare elliptische Randwertprobleme auf allgemeinen Gebieten

Für das lineare elliptische Randwertproblem (einfachster Fall)

$$Lz := \Delta z + dz + f = 0 \text{ in } \Omega, \quad z \cdot g = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

wird auf folgende Weise eine Diskretisierung definiert:

In regulären Gitterpunkten verwende man den Fünf-Punkte-Stern. In irregulären Punkten ersetze man in der Fünf-Punkte-Formel die Werte außerhalb Ω^0 durch Linearkombinationen des nächst-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

gelegenen Randwertes und k anschließender Werte auf der entsprechenden Gitterlinie. Dann ist für $k \leq 4$ das so definierte Verfahren konvergent und die Näherungslösung ξ_n besitzt eine Fehlerasymptotik der Form $\xi_n(P)-z(P)=h^2e_2(P)+h^4e_4(P)+O(h^5)$ in $\|\cdot\|_\infty$. Diese Asymptotik kann mittels "deferred correction" oder "diskreter Newton-Verfahren" zu Methoden höherer Ordnung ausgebaut werden. Die vorgetragenen Resultate verbessern und verallgemeinern Ergebnisse von Collatz, Shortley-Weller, Kreiss, Pereyra-Proskuvowski-Widlund.

H. Brakhage: Zur Existenz asymptotischer Entwicklungen bei Diskretisierungen

Der Operator $A: C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ besitze eine Integraldarstellung $Au(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,x-x')u(x')dx'$ mit einem stetigen Integralkern $k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n-\{0\}))$. Für $h=(h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ sei $\Delta_n := \{(\nu_1 h_1,\dots,\nu_n h_n);\ \nu_j \in \mathbb{Z}$ und $u_h := h_1 \dots h_n \sum_{x' \in \Delta_n} u(x') \cdot \delta(x-x')$ sowie $R(x,h) := Au_h(x) - Au(x)$. $\mathcal{R}$ sei die Klasse der Operatoren A der angegebenen Art, für die k eine Darstellung $k(x,t) = k^0(x,t) + k^1(x,t)\frac{1}{r^n} + k^2(x,t) \cdot \ln r\ (r := |x|)$ besitzt mit $k^0, k^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und $k^1(x,r;w)$ $(w = \frac{x}{|x|})$ als Funktion von x,r,w in $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$ liegt. Es gilt: Für $A \in \mathcal{R}$ und alle $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ besitzt der Diskretisierungsfehler eine asymptotische Entwicklung (1) $R(x,h) \sim \sum_{\mu=n+1}^{\infty} R_\mu(x,h)$, wobei R_μ μ-homogen in h ist. Unter zusätzlichen Bedingungen an die auftretenden asymptotischen Entwicklungen gilt eine Umkehrung. $\mathcal{R}$ ist die Klasse der Pseudo-Differentialoperatoren A mit $\deg(A) \leq -n-1$, die also im angegebenen Sinn durch ihre Verhalten bei Diskretisierungen charakterisiert werden kann. Definiert man u_h als interpolierenden m-Spline (ungerade) im Sinne der Theorie der Cardinal-Splines, so kann man eine analoge Kennzeichnung für PDO gegebenen Ordnung angeben.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

B. Brosowski: Dedekind-Vervollständigung halbeordneter Vektorräume und der Satz von Korovkin

In der Arbeit [1] wurde ein Zugang zum bekannten Korovkinschen Satz dargestellt, der die Dedekind-Vervollständigung halbgeordneter Vektorräume verwendete. Den Korovkinschen Satz kann man danach auffassen als die Fortsetzung des Konvergenzverhaltens einer Folge von monotonen Operatoren, definiert auf einem halbgeordneten Vektoraum auf die Dedekind-Vervollständigung dieses Raumes. Im Vortrag wurde gezeigt, wie man diesen verallgemeinerten Korovkin-Satz zum Nachweis der Konvergenz von Differenzenverfahren bei gewissen partiellen Differentialgleichungen verwenden kann, insbesondere wurde das Dirichlet-Problem der Potentialgleichung betrachtet.

[1] BROSOWSKI, B.: The completion of partially ordered vector spaces and Korovkin's theorem.
Approximation Theory and Functional Analysis. North Holland. 1979

P. Chenin: Integral Representation of Interpolation

The integral representation of interpolation error is considered as a generalization of Wronskian method for one variable. This is based on the construction of a system of differential operators associated with the basis interpolant functions and on the Neumann's Kernel associated with the interpolation's domain.

W. Dahmen: Mehrdimensionale B-Splines-Rekursionsformeln und Linearkombinationen

In diesem Vortrag werden analytische Darstellungen für gewisse mehrdimensionale glatte B-Splines vorgestellt, die bisher nur über eine geometrische Eigenschaft charakterisierbar waren. In einer ersten Darstellung ergeben sich die B-Splines als Linear-

kombinationen von Fundamentallösungen gewisser Differentialoperatoren. Diese Fundamentallösungen lassen sich als mehrdimensionale Analoga zu den eindimensionalen "abgebrochenen Potenzen" verstehen. Hieraus ergeben sich dann leicht praktische Rekursionsformeln für die B-Splines und deren Ableitungen. Ferner wird ein allgemeines Konstruktionsprinzip für lineare Erzeugnisse solcher B-Splines vorgestellt, die alle Polynome entsprechenden Grades enthalten.

F. Deutsch: The Alternating Method of von Neumann

When A and B are closed subspaces of a Hilbert space X and P_A, P_B are the corresponding orthogonal projectors, von Neumann (1933) showed that

$$(\alpha) \qquad [(I-P_A)(I-P_B)]^n x \longrightarrow (I-P_{A+B})x, \qquad x \in X.$$

This result is extended by replacing X with any smooth and uniformly convex Banach space, and A and B any closed subspaces whose corresponding metric projectors P_A, P_B are linear. Further, it is shown that (α) holds whenever X is a uniformly smooth and uniformly convex Banach space and A,B closed subspaces such that A+B is closed.

B. Dreseler: Symmetriesierungsformeln und Normabschätzungen von Projektoren bei Fourierreihen in mehreren Veränderlichen

Für Fourier-Entwicklungen in n Veränderlichen wird eine Verallgemeinerung der klassischen Symmetriesierungsformel von Marcinkiewicz-Lozinski-Berman bewiesen, die die zusätzliche Invarianz unter einer endlichen Gruppe $\Gamma \subset O(n)$ von Automorphismen von $T^n = [-\pi,\pi)^n$ berücksichtigt. Es folgen Normabschätzungen für ste-

tige lineare Projektoren, die in den Spezialfällen $n = 1$, $\Gamma = \{1,-1\}$ und $n \geq 1$, $\Gamma = \{1_n\}$ bekannt sind. Als Anwendungen werden Normabschätzungen zur trigonometrischen und algebraischen Interpolation in n Veränderlichen und Abschätzungen von Lebesgue-Konstanten bei Fourier-Reihen auf kompakten Lie-Gruppen bewiesen.

. Duchon: Error estimates for spline interpolation to scattered data

Let f be a function : $Q = [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}$ and A an arbitrary finite set of points in Q. Define f_s^A to be (for real $s > \frac{n}{2}$) the minimizer of $\Phi_s(v) := |r^s \hat{v}|_{L^2(\mathbb{R}^n \sim 0)}$ subject to interpolatory constraints $v(a) = f(a)$, $a \in A$, plus some conditions at ∞. One proves, in the case on noninteger s, that if f belongs to the Sobolev space $W^{s,2}(Q)$ and A is h-dense in Q, then $|f-f_s^A|_{j;p,Q} = \sigma(h^{s-j-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}})$.

The method of proof is based on an alternative expression for $\Phi_s(v)$, namely $|v|_{s,2,\mathbb{R}^n} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\times \mathbb{R}^n} \frac{|D^{[s]} v(x) - D^{[s]} v(y)|^2}{|x-y|^{n+2(s-[s])}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}$,

and the fact that $|v|_{s,2,Q}$ defines an equivalent norm on $W^{s,2}(Q) \,/\, P_{[s]}$. There is no "mesh ratio" condition on the data set A.

H. Engels: Kubaturformeln für unregelmäßig berandete Gebiete

Kubaturformelbestimmung für unregelmäßig berandete Gebiete führt auf einige Probleme; etwa: Erfassung des Randes, Positivität der Gewichte, Lage der Stützstellen, Kubaturfehlererfassung.

Für ein nur wenig standardisiertes Gebiet G wird die Konstruktion allgemeiner Kubaturformeln auf algebraischem Wege betrachtet. Hierfür ist notwendige Voraussetzung die Kenntnis der Momentintegrale

I_{jk}. Es wird gezeigt, daß sich diese stets rekursiv berechnen lassen, wenn der Rand von G ein Polynom beliebigen Grades ist. Aspekte der Formelkonstruktion und Kubaturfehler werden diskutiert für den Fall, daß der Gebietsrand durch Polynome approximiert wird.

$$G = \{(x,y) / \ |x| \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq g(x),\ g(x) > 0 \text{ in } (-1,1],\ g \text{ Randkurve}\}$$

$$I_{jk} = \iint_G x^j y^k dydx = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{g(x)} x^j y^k \, dydx$$

D.C. Handscomb: Optimal cubature over a plane region

Applying the principles set out by Golomb & Weinberger, Duchon and Meinguet, I shall discuss briefly the determination of nodes and coefficients for a cubature formula over a simple region which is optimal, given the number of nodes, with respect to a quadratic seminorm derived from the bending energy of a thin plate. I shall describe a practical procedure, which is particularly easy to implement in the case of a circular region, although more generally applicable, and present a few numericals results.

W. Haußmann: Zur Fehlerformel für mehrdimensionale Interpolation

Wir betrachten die zweidimensionale Hermite-Interpolation im Tensorproduktfall und leiten die Fehlerformel

$$h(x,y) - R(x,y) = \frac{\partial^{M+1} h(\xi,y)}{\partial x^{M+1} (M+1)!} \omega(x) + \frac{\partial^{N+1} h(x,\eta)}{\partial y^{N+1} (N+1)!} \bar{\omega}(y) - \frac{\partial^{M+N+2} h(\xi',\eta')\omega(x)\bar{\omega}(y)}{\partial x^{M+1} \partial y^{N+1} (M+1)! (N+1)!}$$

her für $h \in C^{M+1,N+1}$, $R \in \Pi_{MN}$ bei Interpolation auf dem Gitter $\{x_0,\ldots,x_m\} \times \{y_0,\ldots y_n\}$ mit den Vielfachheiten $(\alpha_\mu,\beta_\nu)_{0 \leq \mu \leq m,\, 0 \leq \nu \leq n}$.

Wir ziehen nicht die im Fall $\alpha_\mu = \beta_\nu = 0$ von STANCU verwendete Methode der dividierten Differenzen heran, sondern benutzen eine

2-dimensionale Version des Satzes von Rolle, die auch unregelmäßiger verteilten Knoten besser angepaßt ist als dividierte Differenzen.

G. Heindl: Interpolation durch stückweise quadratische C^1-Funktionen

Es werden mehrere Hermitesche Interpolationsprobleme in der Ebene mit Hilfe von simplizialen Spline-Funktionen der Ordnung 2 (das sind C^1-Funktionen, deren Einschränkungen auf die Dreiecke eines Dreiecknetzes Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 sind) gelöst.

Aus den Approximationseigenschaften der Interpolierenden kann u.a. gefolgert werden, daß ein auf einem Gebiet G der Ebene definiertes stetiges symmetrisches Tensorfeld der Stufe 2 genau dann integrierbar ist, wenn es sich lokal gleichmäßig durch zweite Ableitungen von Spline-Funktionen der Ordnung 2 (im Fall des einfachen Zusammenhangs von G sind das die simplizialkonstanten tangentialstetigen symmetrischen Tensorfelder der Stufe 2) approximieren läßt.

A. Jakimovski: On an interpolation problem for functions of several variables and Spline functions

Let $x=(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ and $y=(y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ be two fixed strictly increasing sequences of real numbers, and denote $a:=\inf x_i \geqq -\infty$, $b:=\sup x_i \leqq +\infty$, $c:=\inf y_j \geqq -\infty$ and $d:=\sup y_j \leqq +\infty$. Let $G \supset (a,b)\times(c,d)$ be a fixed domain. Given a prescribed sequence $u=(u_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ of complex numbers, the problem of finding a function $F:G\to\mathbb{C}$ belonging to a preassigned linear space $\mathcal{S}$ of functions from G to $\mathbb{C}$ and such that $F(x_i,y_j)=u_{ij}$ for all pairs of integers i,j is called the

interpolation problem IP(u;$\mathcal{S}$,x,y,G). The symbol IP(u;$\mathcal{S}$,x,y,G) will also denote the set of all its solutions (which may be empty). It is our object to consider the existence and nature of solutions of IP(u;$\mathcal{S}$,x,y,G) for certain choices of the space.

J. Meinguet: <u>A Convolution Approach to Multivariate Representation Formulas</u>

The problem of expressing a function of n variables in terms of its m-th partial derivatives modulo the space of polynomials of degree < m is of a basic importance in (linear) numerical analysis and approximation theory. In particular, appropriate generalizations of the truncated Taylor series and of its integral remainder term are requested for extending the Peano kernel theorem. It turns out that the underlying theory is greatly simplified by resorting systematically to such a basic mathematical tool as the convolution of distributions.

Ch.A. Micchelli: <u>Recurrence Relations for Multidimensional B-splines</u>

In this talk we will present some new properties a multivariate version of the univariate B-spline. In particular, we will give recurrence relations for this function which facilitate its computation as well as its derivatives.

H.M. Möller: <u>Kubaturformeln und Hauptklassenideale</u>

Der Satz von Max Noether aus der algebraischen Geometrie wurde von verschiedenen Autoren zur Konstruktion von n-dimensionalen Kubaturformeln benutzt. Bei den so erhaltenen Formeln waren jeweils die Knoten gemeinsame Nullstellen von n orthogonalen Poly-

nomen. Basierend auf dem Begriff der Hauptklassenideale wird ein Verfahren vorgestellt, bei dem n Polynome sukzessive festgelegt werden. Dabei werden auch andere als orthogonale Polynome zugelassen. Mit den gemeinsamen Nullstellen der n Polynome kann eine Kubaturformel mit vergleichsweise geringer Knotenzahl konstruiert werden.

G. Opfer: Über einige Approximationen vektorwertiger Funktionen

Beispiele für in der Überschrift genannte Approximationen sind Approximationen von vorgegebenen Randdaten bei der Lösung partieller Differentialgleichungen, z.B. der Plattengleichung mit Randbedingungen $u = \Delta u = 0$ oder die Approximation komplexer Funktionen in Gebieten der komplexen Ebene.

Für das lineare Approximationsproblem in der Menge $C(B,\mathbb{R}^n)$ der auf B stetigen Funktionen mit Werten im $\mathbb{R}^n$ wird mit Hilfe des Kolmogoroff-Kriteriums ein Lösungsalgorithmus angegeben. Dabei werden die beiden Fälle $\|f\|_2 = \max_{z \in B} (\sum_{j=1}^{n} f_j^2(z))^{1/2}$ und $\|f\|_\infty = \max_{z \in B} \max_{j=1,2,\ldots,n} |f_j(z)|$ betrachtet. Übertragungen auf den nichtlinearen Fall werden angedeutet. Im komplexen Fall ist das folgende Resultat bekannt: In $H_1(R) = \{f$ ist holomorph auf $R: f(o)=o, f'(o) = 1\}$ gibt es genau ein Element kleinster Norm. Dabei ist die Norm definiert durch $\|f\| = \sup_{z \in R} |f(z)|$. Der Betrag $|\cdot|$ kann dabei irgendeine Norm im $\mathbb{R}^2$ bedeuten. Das Element f_{Min} bildet R konform ab auf die "Kreisscheibe" $\{z \in \mathbb{C}: |z| < \|f_{Min}\|\}$.

F. Pittnauer: Über die Lösung linearer Integrodifferentialgleichungen mit ausgeartetem Kern

Unter Verwendung einer in der Literatur vorhandenen jedoch

kaum beachteten Substitution werden lineare Integrodifferentialgleichungen mit ausgeartetem Kern in Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung transformiert. Damit eröffnet sich ein bequemer Weg zur analytischen wie numerischen Behandlung von Integrodifferentialgleichungen auch für den Fall nicht-ausgearteter Kerne, wenn man von den Möglichkeiten der Approximation von Funktionen mehrerer Veränderlicher durch Tensorprodukte von Funktionen einer Veränderlichen Gebrauch macht.

Im Bereich der Lösungstheorie (Anfangs-, Rand- und Eigenwertaufgaben), der Asymptotik wie der Diskretisierung von Differentialgleichungen finden sich viele auf diese Weise direkt auf Integrodifferentialgleichungen übertragbare Ergebnisse.

M. Reimer: Beste Approximationen an Polynome im Mittel und Normen von Koeffizientenfunktionalen

Mit Hilfe einer von Kellogg stammenden Abschätzung der Koeffizienten homogener Polynome, die auf der Einheitssphäre durch Eins beschränkt sind, kann eine sehr einfache Lösung des Problems der besten Approximation von Monomen in zwei Variablen durch Polynome niederen Grades gewonnen werden. Bei mehr als zwei Variablen scheitern entsprechende Versuche, da die Kellogg-Schranke nicht nur gelegentlich nicht erreicht wird, sondern sogar in der Größenordnung völlig unrealistisch ist, wenigstens, solange homogene harmonische Polynome betrachtet werden. Dies wird mit Hilfe einer Familie von Polynomen nachgewiesen, die auch sonst eine Reihe von bemerkenswerten Eigenschaften besitzt.

A. Sard: Multivariate splines

Two propositions of Laurent's (1972) are used to calculate the spline operator, the operator which carries the observation of $x \in X$ into the spline approximation of x. The calculation is especially manageable when the base space X is of type A (Nielson 1973, Sard 1977). Of many possible instances, two are given: Nielson's splines and new splines in which the observation of x consists of more than a finite number of scalars.

W. Schempp: Interpolation zonaler harmonischer Funktionen

Sei $(e_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Untergruppe K von $G = SO(n+1)$, welche aus allen den Punkt $\mathbb{1} = e_{n+1}$ fest lassenden Drehungen besteht, kann mit der speziellen orthogonalen Gruppe SO(n) identifiziert werden. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ heißt zonal (bezüglich der Achse $\mathbb{R}\,e_{n+1}$), falls für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Beziehung $f(x) = f(tx)$ $(t \in SO(n))$ erfüllt ist. Für zonale Funktionen $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+1})$, die in einer Umgebung der kompakten Einheitskugel $\overline{B}_{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \ |x| \leq 1\}$ harmonisch sind, wird die Approximation durch zonale harmonische Polynome studiert, welche Φ längs Meridianen von $\overline{B}_{n+1}$ interpolieren und für den Fall, daß die Mittelpunkte der Meridiane Nullstellen von Jacobi-Polynomen sind, ein Konvergenzsatz bewiesen.

K. Scherer: Interpolation von Sobolevräumen

In der Theorie der finiten Elemente haben verschiedene Autoren gezeigt

$$\|u - u^h\|_{L^p} \leq C h^k \|u\|_{W^k_p}$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

für $p = 2$ und $p = \infty$ und $k \geqq 2$. R. Scott stellte das Problem, diese Abschätzung für $2 \leqq p \leqq \infty$ durch Interpolation zu beweisen. Dies führt auf das Problem, Interpolationsräume von Sobolevräumen über

$$(*) \quad (W_p^k, W_q^k)_{\theta,r} = W_r^k, \; \theta = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

zu berechnen. Im Falle $1<p<q<\infty$ kann man dies durch Isomorphismen auf den bekannten Fall $k = 0$ zurückspielen, ebenso im Falle $n = 1$ und $1 \leqq p<q\leqq \infty$. Im Vortrag wird der Fall $n \geqq 2$ betrachtet und allgemeiner als $(*)$ gezeigt, daß für das Peetresche K-Funktional gilt, falls $f \in W_1^k + W_\infty^k$,

$$K(t,f;\, W_1^k, W_\infty^k) \approx \sum_{j=0}^{k} K(t,f^{(j)};\, L_1\, ,\, L_\infty).$$

Die Sobolevräume W_p^k können dabei auch auf Gebieten Ω des $\mathbb{R}^n$ definiert sein, die die "cone property" erfüllen.

Diese Ergebnisse sind in einer gemeinsamen Arbeit mit R. De Vore enthalten.

R. Scherer, K. Zeller: Zweidimensionales Gitter für Polynome

Eine auf einem Rechteck definierte stetige Funktion f soll durch ein Polynom $p \in \mathcal{P}_{kl}$ im Sinne von Tschebyscheff approximiert werden. Zunächst bietet sich Produkt-Interpolation auf einem Gitter an. Durch Einschaltung des besten Approximationspolynoms in x- und y-Richtung gelangt man zu realistischen Fehlerschranken. Dabei ist nützlich, daß die eindimensionalen Approximationsgrade auftreten. Etwas störend sind die Normen der Interpolationsoperatoren, die groß werden können (Lebesgue-Konstanten). Durch Verfeinerung des Gitters erreicht man mit Hilfe der eindimensionalen Gitterkonstan-

Gefördert durch
Deutsche Forschungsgemeinschaft

ten, bei Kenntnis der Abweichung von p zu f im Gitter, günstige Fehlerschranken. Es zeigt sich, daß auch im zweidimensionalen Fall ein relativ kleines Gitter genügt. Zur Konstruktion eines Polynoms $p \in \wp_{kl}$ mit minimalem Abstand zu f im Gitter (diskrete Approximation) bieten sich Methoden der linearen Optimierung (Simplexverfahren) und Methoden vom Remes-Typ an.

W. Schlöglmann: Spline-Funktionen und Gauß'sche Prozesse (mehrdimensionaler Fall)

Kimeldorf-Wahba zeigten in ihrer Arbeit "Spline functions and stochastic processes" den Zusammenhang zwischen Vorhersage-Problemen für stochastische Prozesse mit $\mathcal{H}^k[0,1]$ als reproduzierenden Kernhilbertraum und Spline-Funktionen. Es sollen nun diese Ergebnisse auf stochastische Prozesse indiziert durch Gebiete im $\mathbb{R}^n$ und Sobolevräume als reproduzierende Kernhilberträume ausgedehnt werden.

H. J. Schmid: Kubaturformeln und reelle Ideale

Es wird der Zusammenhang zwischen Kubaturformeln und reellen Idealen aufgezeigt. Sei

$$1 : \wp^n_m(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : P \longrightarrow 1(P) = \int_\Omega P(x)\omega(x)dx, \; m \in \mathbb{N}$$

ein strikt positives lineares Funktional mit $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $\wp^n_m$ die Menge der Polynome in n Variablen vom Grad $\leq m$ ist, $\wp^n_m(\Omega)$ die Einschränkung von $\wp^n_m$ auf Ω. Eine unverkürzbare Kubaturformel zu 1 hat die Gestalt

$$(*) \qquad 1(P) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(x_i), \; \alpha_i > 0, \; x_i \in \Omega, \; P \in \wp^n_m,$$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

wobei die Gewichte α_i durch die Knoten x_i eindeutig festgelegt sind. Es wird nachgewiesen, daß es genau dann eine unverkürzbare Darstellung (*) von 1 gibt, wenn es 1-orthogonale Polynome $R_1, R_2, \ldots R_t$ in $\mathcal{P}^n_{m+1}$ gibt, die ein reelles Ideal mit μ Nulistellen in Ω erzeugen. Eine weitere hierzu äquivalente Bedingung wird angegeben, die sich für die Konstruktion von Kubaturformeln als günstiger erweist.

R. Schnabl: Die Algebra der Bernsteinoperatoren und symmetrische Funktionen

Zur Untersuchung der Algebra der Bernsteinoperatoren auf einem Simplex, $B = \left\{ B_\mu = \int_A B_\alpha d\mu(\alpha) \mid \mu \in C(A)^* \right\}$, werden die stetigen Funktionen auf A, $A = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq 0, \sum_i \alpha_i \leqq 1 \right\}$ als symmetrische Funktionen auf $K = \bigcup_n K_n, K_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, x_{n+1} = \ldots = 0, \sum_i x_i = 1 \right\}$, aufgefaßt. Durch $(B^A_\mu f) \mid K_n := B_\mu(f \mid K_n), f \in C(A)$ werden Operatoren $B^A_\mu : C(A) \rightarrow C(A)$ und eine zu B isomorphe Algebra von Operatoren erklärt. Eigenschaften dieser Operatoren und dieser Algebra werden angegeben. Insbesondere gilt die Produktregel: Ist $\mu, \nu, \sigma \in C(A)^*$, dann gilt

$$B_\nu B_\mu = B_\sigma \Leftrightarrow \int_A (B^A_\mu f)(\beta) d\nu(\beta) = \int_A f(\gamma) d\sigma(\gamma), \quad f \in C(A).$$

L.L. Schumaker: On Spaces of Piecewise Polynomials

If $\Delta = \{ \Omega_i \}_1^k$ is a partition of a set $\Omega \subseteqq \mathbb{R}^2$ and U_m is an m dimensional linear space $\subseteqq C^r(\bar{\Omega})$, we are interested in $S(U_m; C^r; \Delta) = \{ s \in C^r(\Omega) : s|\Omega_i \in U_m \}$. For r= - 1 this is clearly a linear space of dimension m .k. For $r > 0$ we assume that Δ is a triangu-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

lation and that $U_m = P_m$ = the space of polynomials of order m. For $r = 0$ it is easy to give the dimension of S. For $r > 1$ the problem is much more difficult and only lower and upper bounds on the dimension can be established.

F.W. Steutel and F. Schurer: Application of probability theory in approximation with multi-dimensional Bernstein operators

We consider (positive, linear) operators $L_{n_1,\dots,n_N}$ of the form

$$L_{n_1,\dots,n_N}(f;x_1,\dots,x_N) = \sum_{k_1}\dots\sum_{k_N} p_{k_1\dots k_N} f\left(\frac{k_1}{n_1},\dots,\frac{k_N}{n_N}\right) = Ef\left(\frac{K_1}{n_1},\dots,\frac{K_N}{n_N}\right),$$

where f is continuous on $[0,1]^N$, and K_j is a random variable taking values in $\{0,1,\dots,n_j\}$ ($j = 1,2,\dots,N$), with $EK_j = n_j x$ and $\mathrm{Var}\, K_j = o(n_j^2)$ as $n_j \to \infty$. Here, E and Var denote expectation and variance.

We concentrate on the case where N=2 and where K_1 and K_2 have binomial distributions, i.e. the case of the two-dimensional Bernstein operators. We consider the independent case: Bernstein operator on the unit square, and the dependent case $K_1+K_2=1$: Bernstein operator on the simplex.

Our results: explicit expressions for $c_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$, the best constants of approximation for functions f with $\omega(f;\sqrt{n_1},\sqrt{n_2})=1$, their maxima, and for $c(x_1,x_2) = \lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} c_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$, and, finally, results (in part only numerically) for $\max_{x_1,x_2} c(x_1,x_2)$.

The limiting results are obtained by use of the multi-dimensional central limit theorem.

U. Tippenhauer: Eine Projektionsmethode für das biharmonische Problem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und konvex.
Die Lösung $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ des biharmonischen Problems

$$\Delta^2 u = f \quad L^2(\Omega) \text{ in } \Omega$$
$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

wird mit Hilfe der orthogonalen Projektion P von $L^2(\Omega)$ auf den Unterraum der harmonischen Funktionen und eines Satzes von Grisvard charakterisiert. Für ein Rechteck wird die explizite Bestimmung von u durchgeführt, wobei Resultate von Aronszajn über den Raum der harmonischen Funktionen verwendet werden.

Mit den Partialsummen der für die Darstellung von P verwendeten Reihen und der Methode der finiten Elemente wird eine gekoppelte Approximation angegeben.

K. Zeller (mit R. Scherer): Unendliche Gleichungssysteme in der konstruktiven Analysis

Seit langem wurden unendliche Gleichungssysteme bei mathematischen Konstruktionen verwendet (Borel, Perron, Eidelheit, Pólya, Pittnauer u.a.). Es gibt jedoch noch viele Anwendungsmöglichkeiten, insbesondere im Hinblick auf Funktionen von mehreren Veränderlichen. Der Vortrag stellt einige Prinzipien, Ergebnisse und Anregungen zusammen (Stichworte: Ableitungen und Asymptotik, beste Approximationen, gute Approximationen).

F.-J. Delvos (Siegen)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft