MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 8/1979

Funktionentheorie

11.2. bis 17.2.1979

Die Funktionentheorietagung, in deren Mittelpunkt Funktionen einer Veränderlichen stehen, fand in diesem Jahr vom 11. bis 17. Februar im Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach statt. Die Leitung hatten G.Frank (Dortmund), K.Strebel (Zürich) und H.Wittich (Karlsruhe) übernommen. Der Tagung wohnten 54 Teilnehmer, darunter 16 aus dem Ausland, bei.

Die diesjährige Tagung hatte den Charakter einer Arbeitstagung. Im Mittelpunkt standen drei Vortragsserien (jeweils 5-mal 1 Stunde), die insbesondere jüngeren Mathematikern einen Überblick über spezielle Forschungsgebiete geben sollten. Für diese Vortragsserien hatten sich dankenswerterweise zur Verfügung gestellt:

K. Strebel: Riemannsche Flächen
A. Marden: Teichmüller Räume
G. Frank, E. Mues: Differentialpolynome
Neben den Vortragsserien wurden noch einige Kurzvorträge von jeweils 20 Minuten Dauer gehalten.

<u>Teilnehmer</u>

J.M. Anderson, London
J. Becker, Berlin
H. Begehr, Berlin
R. Boutellier, Zürich
A. Cornea, Frankfurt
V. Dietrich, Aachen
K. Doppel, Berlin
H. Epheser, Hannover
G. Frank, Dortmund
W.H. Fuchs, Berlin
F. Gackstatter, Aachen
E. Grassmann , Berlin
D. Gronau, Graz
H. Grunsky, Würzburg
K. Habetha, Aachen
G. Hennekemper, Hagen

W. Hennekemper, Hagen
A. Huber, Zürich
F. Huckemann, Berlin
G. Jank, Aachen
O. Knab, Karlsruhe
H. Köditz, Hannover
R. Kunert, Berlin
I. Laine, Joensuu
K. Leschinger, Bonn
W. Luh, Darmstadt
A. Marden, Minneapolis
K. Menke, Dortmund
E. Mues, Hannover
R. Nevanlinna, Helsinki
J. Nikolaus, Siegen
R. Perko, Graz
E. Peschl, Bonn
A. Pfluger, Zürich
C. Pommerenke, Berlin
L. Reich, Graz
H.M. Reimann, Bern
M. von Renteln, Gießen
S. Ruscheweyh, Würzburg
T. Rychener, Bern
G. Schmieder, Hannover
A. Sontag, Zürich
A. Steiner, Zürich
N. Steinmetz, Karlsruhe
K. Strebel, Zürich
H. Tietz, Hannover
S. Timmann, Hannover
R. Trautner, Ulm
L. Volkmann, Berlin
J. Winkler, Berlin
K.-J. Wirths, Würzburg
H. Wittich, Karlsruhe
A. Wohlhauser, Lausanne
D. Wrase, Karlsruhe

Vortragsauszüge

K. STREBEL: Riemannsche Flächen

In 5 Vorträgen über Riemannsche Flächen wurden zuerst die topologischen Grundlagen gegeben: Der Begriff einer (topologischen) Fläche, Fundamentalgruppe, Überlagerungsflächen. Dann folgte der Begriff der konformen Struktur, harmonische und subharmonische Funktionen auf einer Riemannschen Fläche, Lösung des Dirichlet-Problems auf Teilgebieten einer Riemannschen Fläche. Damit erhielt man schließlich die Greensche Funktion und die fundamentale Unterscheidung zwischen hyperbolischen und parabolischen Flächen. Den Schluss bildete der Riemannsche Abbildungssatz für einfach zusammenhängende Flächen, der im hyperbolischen Fall mit Hilfe der Greenschen Funktion, im parabolischen und elliptischen mittels einer holomorphen Funktion mit einem einfachen Pol bewiesen wurde.

A. MARDEN: Teichmüller Räume

A. Marden gave a series of five informal lectures on Teichmüller space. He presented definitions in terms of deformations of riemannian metrics on a fixed surface, quasiconformal homeomorphisms between Riemann surfaces, topological markings on surfaces, and isomorphisms between fuchsian groups. He emphasized the central role of the Teichmüller metric and Teichmüller mappings, and discussed the geometry of the latter in some details in terms of local affine maps. The Teichmüller space of the torns was constructed and the general definitions exhibited in concrete form for this case. Four ways of parameterizing general Teichmüller space were discussed: three real parameterizations and one complex parameterization in terms of the Bers embedding. It was explained why Teichmüller space cannot be regarded as merely a generalized unit disk. The entrance of kleinian groups and the Bers boundary into the picture was briefly pointed out.

G. FRANK, E. MUES: Differentialpolynome

In vier Vorträgen über Differentialpolynome wurden zuerst die wichtigsten Grundlagen und Hilfsmittel der Nevanlinnaschen Wertverteilungslehre bereitgestellt (die beiden Hauptsätze, der Satz über die Schmiegungsfunktion der logarithmischen Ableitung). Danach folgte eine Übersicht über klassische und neuere Ergebnisse über die Wertverteilung von Differentialpolynomen. Anhand exemplarischer Beispiele wurde versucht, die verschiedenen in dieser Theorie angewandten Beweismethoden zu erläutern (lineare und nichtlineare Beweistechniken). Schließlich wurde der Zusammenhang zwischen der Wertverteilung von Differentialpolynomen und der Frage nach der Existenz von im Großen eindeutigen Lösungen nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen im Komplexen aufgezeigt. Es schloß sich an eine Übersicht über die wichtigsten Resultate bezüglich der Existenz bzw. Nichtexistenz von im Großen eindeutigen Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen.

R. BOUTELLIER: Extremalprobleme sternförmiger Funktionen

Jede sternförmige Funktion, $f \in S^*$, kann durch ein Stieltjes-integral dargestellt werden:

$$f(z) = z \exp \int_0^{2\pi} -2 \log(1-ze^{i\theta}) \, d\mu \qquad (*)$$

wo μ ein Wahrscheinlichkeitsmass ist. Mit der Variation von

μ_0 zu $\mu_\varepsilon = (1-\varepsilon)\mu_0 + \varepsilon'\mu = \mu_0 + \varepsilon(\mu - \mu_0)$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$

folgt durch Einsetzen in ($*$) und Entwicklung nach ε eine einfache Variation f_ε der μ_0 entsprechenden Funktion f_0:

$$f_\varepsilon(z) = f_0(z) + \varepsilon f_0(z) \int -2 \log(1-e^{i\theta} z) \, d(\mu - \mu_0) + O(\varepsilon^2)$$

Ist $f \in S^*$, so ist $F(z) = (f(\frac{1}{z}))^{-1}$ eine Funktion der Klasse Σ^* (sternförmig auf dem Äußeren des Einheitskreises). Mit Hilfe der obigen Variation kann der folgende Verzerrungssatz bewiesen werden:

Satz: Ist $F \in \Sigma^*$ und $0 < a < 1$, so ist

$$1-a^2 \leq \left|F'\left(\frac{1}{a}\right)\right| \leq \frac{2}{e} \frac{a}{\log \frac{1+a}{1-a}} \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}$$

Die untere Schranke wird nur für Funktionen der Form

$$F(z) = z\left(1-\frac{e^{i\alpha}}{z}\right)\left(1-\frac{e^{-i\alpha}}{z}\right), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

angenommen, die obere nur für die Funktion

$$G(z) = z\left(1-\frac{1}{z}\right)^{2m}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{2-2m},$$

$$m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log \frac{1+a}{1-a}} - \frac{(1-a)^2}{2a}\right).$$

(G bildet auf das Äussere eines winkelförmigen Schlitzes ab, dessen Schenkel symmetrisch zur reellen Achse liegen)

W.H. FUCHS: Über das Wachstum meromorpher Funktionen

Es sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion der nichtganzzahligen Ordnung λ, $0 \le \delta < \pi$,

$$N(r,f) + N(r,1/f) = N(r)$$

$$\liminf_{r \to \infty} \left| \log |f(re^{i\delta})| + \log |f(re^{-i\delta})| \right| / N(r) = L$$

Dann gilt:

$$L \le \frac{2\lambda\pi \max \{ |\cos \lambda\delta|, |\cos \lambda(\pi - \delta)| \}}{|\sin \pi \lambda|}$$

G. HENNEKEMPER: Zur Wertannahme der Ableitungen von Potenzen ganzer Funktionen

Wir beweisen mit Hilfe der Nevanlinna'schen Wertverteilungslehre und der Theorie der linearen Differentialgleichungen im Komplexen folgenden Satz:

Satz: Es sei f eine ganze transzendente Funktion, $n,k \in \mathbb{N}$ mit $n \ge k+1$. Dann nimmt

$$(f^n)^{(k)}$$

jedes $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ unendlich oft an.

K. LESCHINGER: Fixpunkte von Automorphismen Riemannscher Flächen

Sei X eine hyperbolische Riemannsche Fläche, d_X ihre Poincaré-Distanz, $f \ne id$ ein holomorpher Automorphismus von X, $x_o \in X$, $N(f,R) = \# \{x \in X: f(x)=x,\ d_X(x,x_o) \le R\}$.

Satz 1: Es gibt universelle Konstanten C_n, $n \ge 3$, so daß für alle X, f (ord $f=n$) gilt: $N(f,R) \le N(f,0) + C_n(\cosh R-1)$, $0 \le R < \infty$. Der Beweis ergibt sich durch Flächenvergleich aus:

Satz 2: Es gibt universelle Konstanten $D_n > 0$, $n \ge 3$, so daß für alle X, f (ord $f=n$) und je zwei Fixpunkte x,y ($x \ne y$) von f gilt: $d_X(x,y) \ge D_n$. Bestmöglich sind:

$$D_n = \operatorname{Arcosh} \frac{\cos^2(\pi/n) + \cos(\pi/p_n)}{\sin^2(\pi/n)}$$

mit $p_3 = p_4 = \infty$, p_n kleinster Teiler von n (bzw. n/2), wenn n ungerade (bzw. gerade), $n \geq 5$. Falls X nicht kompakt, kann $p_n = \infty$ für alle n genommen werden.
Satz 2 ergibt sich aus einem analogen Resultat für elliptische Fixpunkte Fuchsscher Gruppen, das als geringfügige Verschärfung eines Ergebnisses von Pommerenke-Purzitsky angesehen werden kann.

G.P. MEYER: Über die Umkehrung von Exponentialpolynomen in der Nähe von transzendent kritischen Stellen

Ein Exponentialpolynom ist eine ganze Funktion mit der Darstellung

$$f(z) := P_o(z)\, e^{a_o z} + \ldots + P_n(z)\, e^{a_n z}$$

($0 \not\equiv P_\nu(z) \in \mathbb{C}[z]$, $a_\nu \in \mathbb{C}$, $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$, $n \geq 1$).
Es wird gezeigt, wie man mit Hilfe des Pólya'schen Indikatordiagramms I(f) (= konvexe Hülle der Menge der konjugierten Punkte $\{\bar{a}_o, \ldots, \bar{a}_n\}$) explizit analytische Darstellungen für die Umkehrfunktion f(z) in (gewundenen) Umgebungen von transzendent kritischen Stellen, wie etwa $w = \infty$, gewinnt. Die Umgebungen sind dabei auf gewissen Riemann'schen Flächenstücken zu nehmen, welche ihrerseits Teile von logarithmischen Flächen sind. Mit Lg sei der Hauptwert des Logarithmus bezeichnet. Die Glieder der (absolut konvergenten) Reihendarstellung für die Umkehrfunktion von f(z) sind vom Typ

$t^{m_1} (\mathrm{Lg}\ t)^{m_2} e^{\lambda_\nu t}$ mit $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_o$, $\lambda_\nu \in \mathbb{C}$ und

$t = \frac{1}{a_k} \lg \frac{w}{c_k}$, wobei $k \in \{0,\ldots,n\}$ und $c_k \in \mathbb{C}$ geeignet zu wählen sind. Insbesondere stellt die Reihe im Falle konstanter Koeffizienten $P_\nu(z)$ eine Dirichlet-Reihe in t mit komplexen Exponenten dar ($m_1 = m_2 = 0$).

M. v.RENTELN: Randverhalten und Ideale singulärer innerer Funktionen

Singuläre innere Funktionen tauchen bei der Faktorisierung von im Einheitskreis D beschränkten holomorphen Funktionen auf. Sie haben die Form

$$S_\mu(z) := \exp\left[-\int_{\partial D} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)\right]$$

wobei μ ein positives endliches Borelmaß auf ∂D ist, welches singulär bezüglich des (eindimensionalen) Lebesguemaßes m ist. Sie spielen u.a. eine wichtige Rolle in der Theorie der Hardy-Räume H^p für $0 < p < 1$ [Duren, Romberg, Shields: JRAM 238 (1969)], bei den Isometrien der Nevanlinna Klasse N [Stephenson: Indiana Univ. Math. J. 26 (1977)] und in anderen Räumen analytischer Funktionen (z.B. Bergman -Räumen). Es werden Bedingungen an die Maße $\mu_1,\ldots,\mu_N$ gegeben, so daß das Ideal $I:=(S_{\mu_1},\ldots,S_{\mu_N}) = H^\infty$ ist. Sei $U(\mu)$ die Menge der Punkte $a \in \partial D$ wo die symmetrische Derivierte des Maßes $+\infty$ ist. Mit einer geeignet definierten Maximalfunktion $N(\mu,a)$ lautet das Hauptergebnis:

$$\min_{1\le j\le N}\ \sup_{a\in U(\mu_j)}\ \min_{1\le i\le N} N(\mu_i,a) < \infty \implies I = H^\infty .$$

Diese Bedingung ist auch notwendig für grosse Klassen von Idealen I.

G. SCHMIEDER: Teilschlichte Konkretisierung Riemannscher Flächen

Für ein schlichtartiges und relativ-einfach zusammenhängendes Gebiet G auf der nicht kompakten Riemannschen Fläche R sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Es gibt ein schlichtartiges Gebiet B auf R mit $\overline{G} \subset B$;

(ii) Es gibt eine holomorphe und lokal schlichte Funktion auf R, die auf G schlicht ist.

N. STEINMETZ: Ein Malmquistscher Satz für algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung

Es sei

$$(*)\quad P(z,w,w') = A(z,w)+2B(z,w)w'+C(z,w)w'^2 = 0$$

eine irreduzible algebraische Differentialgleichung. Für die Existenz einer im großen eindeutigen und nichtrationalen Lösung von $(*)$ sind folgende Bedingungen notwendig:

1. $C(z,w)$ ist von w unabhängig (o.B.d.A. $C(z,w) \equiv 1$)
2. Bzgl. w ist Grad $A \leq 4$, Grad $B \leq 2$
3. $D(z,\sigma(z)) \equiv 0$, $D_w(z,\sigma(z)) \not\equiv 0$ $(D := B^2-A)$ impliziert $P(z,\sigma(z),\sigma'(z)) \equiv 0$

Diese Bedingungen sind unter zusätzlichen Voraussetzungen an die in A und B auftretenden Koeffizienten auch hinreichend dafür, daß jede Lösung von $(*)$ im großen eindeutig ist. $(*)$ kann dann mit Hilfe elliptischer Funktionen oder Lösungen RICCATIscher Differentialgleichungen integriert werden.

R. TRAUTNER: Fatou-Riesz-Sätze in allgemeinen Folgenräumen

Betrachtet werden Potenzreihen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ vom Konvergenzradius 1 mit Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, wobei die "Fatou-Riesz-Bedingung"

F-R: f ist analytisch in z=1 mit f(1)=0

gelte. Sei $V = \{a = (a_n)_{n=0}^{\infty}\}$ ein linearer Folgenraum über $\mathbb{C}$. Wir sagen, daß in V der Fatou-Riesz-Satz gilt, falls gilt:

$(a_n) \in V$ und F-R impliziert $(s_n) \in V$.

Bekannt ist der Fatou-Riesz-Satz für die Räume

$c_0 = \{(a_n),\ \lim a_n = 0\}$ Fatou 1906, Riesz 1911

$l^\infty = \{(a_n),\ \sup |a_n| < \infty\}$ Fatou 1906

$bv = \{(a_n),\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}-a_n| < \infty\}$ Jurkat-Peyerimhoff 1955

Es wird eine hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung

für einen Folgenraum V angegeben, damit der Fatou-Riesz-Satz gültig ist. Als weitere Beispiele erhält man etwa die Räume

$$l^p = \{(a_n),\ (\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}\ 1 \le p \le \infty$$

$$c_o^1 = \{(a_n),\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k = 0\}$$

K.-J. WIRTHS: Wachstumsbeschränkte holomorphe Funktionen

Es sei $D = \{z \mid |z| < 1\}$, $p > 0$, $R_p := \{f \mid f$ holomorph in D, $\forall z \in D: |f(z)|(1-|z|^2)^p \le 1\}$. Es wird die Berechnung von

$$N(p) = \sup_{f\in R_p} \sup_{z\in D} |f'(z)|\ (1-|z|^2)^{p+1}$$

diskutiert und eine Verallgemeinerung der Ahlfors'schen Methode der Stützmetrik angegeben.

L. VOLKMANN: Einige neue Aspekte des Momentenproblems

Im Zusammenhang mit dem Fourierschen Momentenproblem gelten die beiden folgenden Sätze.

Satz 1 Gegeben sei eine Folge komplexer Zahlen (c_n). Es existiert genau dann eine Funktion $\mu \in BV[0,2\pi]$ mit

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\Theta}\, d\mu(\Theta),$$

wenn in $|z| < 1$ eine Funktion f von beschränkter Randdrehung existiert mit

$$\log f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} z^n.$$

Dabei gilt: $\mu(\Theta) = \lim_{r\to 1} \arg f'(re^{i\Theta})+\Theta$ für fast alle Θ und

$$\log f'(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log(1-e^{-i\Theta} z)\, d\mu(\Theta)$$

Satz 2 Gegeben sei eine Folge komplexer Zahlen (c_n).
Es existiert genau dann eine Funktion $h \in L^\infty [0,2\pi]$ mit

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\Theta} h(\Theta) \, d\Theta$$

wenn in $|z| < 1$ eine analytische Funktion f existiert mit arg $f'(z)$ ist beschränkt für alle $|z| < 1$ und

$$\log f'(z) = i \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n .$$

Dabei gilt: $h(\Theta) = \lim_{r \to 1} \arg f'(re^{i\Theta})$ für fast alle Θ und

$$\log f'(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\Theta) \, d \log(1-e^{-i\Theta} z)$$

E. Mues (Hannover)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft