MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 10/1979

Partielle Differentialgleichungen

25.2. bis 3.3.1979

Die zehnte Tagung über partielle Differentialgleichungen fand unter der Leitung der Herren E. Heinz (Göttingen), G. Hellwig (Aachen) und J. Weidmann (Frankfurt) statt. Herr Weidmann dankte zu Beginn der Tagung Herrn Heinz, der sich zukünftig aus der Tagungsleitung zurückziehen möchte, für seine Bemühungen bei allen bisherigen Tagungen seit 1973, sowie Herrn Hellwig, der wieder die gesamte organisatorische Vorarbeit geleistet hatte. Das große Interesse an dieser Tagung, 1961 erstmals unter der Leitung von Herrn Haack (Berlin) und Herrn Hellwig (damals Berlin) veranstaltet und seither in zweijährigem Abstand regelmäßig durchgeführt, zeigt die Zahl von 61 Teilnehmern (davon 12 aus dem Ausland), von denen 34 Vorträge hielten. Die Themen erstreckten sich über alle Teilgebiete der partiellen Differentialgleichungen, z. B. Existenz- und Regularitätsfragen für nichtlineare hyperbolische und elliptische Gleichungen, Gleichungen der Mathematischen Physik (Dirac-, Schrödinger-, Yang-Mills, Navier-Stokes), Streutheorie, differentialgeometrische Probleme, Spektraltheorie, Pseudo-Differentialoperatoren. Dieses breite Spektrum unterstreicht die Bedeutung der Tagung auch in Hinblick auf eine Gesamtinformation über die Forschungsinteressen in diesem heute sehr breiten Teilgebiet der Mathematik.

Der harmonische Verlauf, die anregende Atmosphäre und die daraus entspringenden zahllosen wissenschaftlichen Gespräche wurden

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

wieder durch die vorbildliche Betreuung durch das Institut wesentlich gefördert. Der Leitung des Instituts und dem Personal des Hauses gilt daher der besondere Dank der Teilnehmer.

Vortragsauszüge

B. BOJARSKI:

Quasiconformal mappings in R^n and nonlinear partial differential equations

The quasiconformal mappings $f : \Omega \to \Omega'$ in R^n are studied via the associated systems of first order non-linear overdetermined systems of p.d.e. (*) $(Df)^* H(f,x)Df = |J_f(x)|^{2/n} G(f,x)$, with Df the Jacobi matrix of f, $J_f(x)$ the Jacobi determinant and $H(f,x)$, $G(f,x)$ symmetric, positive definite matrix functions defined on the product $(f,x) \in \Omega' x \Omega$, $\det H \equiv \det G \equiv 1$, The system (*) is the generalization of the Beltrami equations and its various analogues studied for the case $n = 2$. This approach to quasiconformal theory in R^n is studied by the speaker in cooperation with Dr. T. Iwaniec. In the lecture following topics have been discussed:

1) regularity theory for weak solutions of (*)

2) Point Cauchy problem

3) Liouville Theorem for (*)

4) integrability conditions

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

5) Linearisation of (*)

6) existence questions.

In connetion with the last topic the overdetermined system (*) is extended to systems of the form $(Df)^{*}H(f,x)Df=|J_f|^{2/n}O^{*}GO$ where O is an orthogonal matrix function (O^{*}-its transpose) to be determined in the process of solution. Another way of discussing the existence problem ist to consider, instead of (*), the following system $\mathrm{Tr}[(Df)^{*}H(Df)]^k=J_f^{2k/n}\mathrm{Tr}G^k, k=1,2,\dots n-1$. Local existence theorem is proved for G and H analytic (T.Iwaniec).

PHILIP BRENNER:

On semi-linear hyperbolic equations

Previous results by Jörgens (Math. Z. 77(1961), 295 - 308) and Pecher (Math. Z. 150(1976), 159 - 183) on the existence of smooth global solutions to the semilinear wave equation $\partial_t^2u-\Delta u+f(u) = 0$ are extended to more general second order hyperbolic problems

$$\partial_t^2u - A(x,t,D_x)u + f(u) = 0, \qquad x\in R^n, \; t\geq 0$$
$$u|_{t=0} = g_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = g_1$$

where $A = A(x,t,D_x)$ is a second order negative elliptic operator with C^∞-coefficients, such that $A(x,t,D_x) = A(\infty,D_x)$ for $|x|$ large enough. It is assumed that $f(0) = 0$ and that $f\in C^2$. Using a growth condition $f(u) = O(|u|^{(n+2)/(n-2)}), |u|\to\infty$,

and a positivity assumption on f, the existence of global classical (smooth) solutions of the initial value problem for the wave operator $\partial_t^2-\Delta+f(\cdot)$ was proved by Jörgens (loc. cit.) for $n=3$ and by Pecher (loc. cit.) for $n\leq 6$. Here these results are extended to the equation (1), actually with some slight improvements on the growth restrictions on f's derivatives, and under less severe smoothness assumptions on f and the data.

FELIX E. BROWDER:

Strongly nonlinear parabolic problems

We consider a strongly nonlinear parabolic partial differential equation of the form $\frac{\partial u}{\partial t} + A_t(u) + g(x,t,u) = f(x,t,u)$ where $A_t(u)$ is an elliptic operator of order $2m$, $(m \geq 1)$ in the form

$$A_t(u) = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x,t,Du),$$

and the lower order perturbation g satisfies a general condition introduced by Brezis and the speaker in a corresponding study of elliptic problems in Annali di Pisa, 1978. In this new work (done jointly with Brezis and described in PNAS, Jan. 1979), we derive existence and uniqueness theorems for the solution of the initial-boundary value problem for the parabolic equation under null lateral Dirichlet boundary conditions. The proof is based upon a new compactness lemma of the Aubin type which simplifies and strengthens earlier results. Under the stronger

hypothesis that g is non-decreasing in u (though still satisfying no growth restrictions), we treat other boundary value problems as well as a general class of parabolic variational inequalities.

J. BRÜNING:

Invariante Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators

Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und Δ der Laplace-Beltrami-Operator auf M mit den Eigenräumen Δ_λ. Es sei ferner G eine kompakte Liegruppe, die auf M durch Isometrien arbeitet und Δ_λ^G der Unterraum der G-invarianten Eigenfunktionen zum Eigenwert λ. Wir untersuchen das asymtotische Verhalten der Funktion

$$N(t) = \sum_{\lambda \leq t} \dim \Delta_\lambda^G .$$

Satz 1: Ist $m = \dim M/G$ und ω_m = Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^m$, so gilt für $t \to \infty$

$$N(t) \sim \frac{\omega_m}{(2\pi)^m} \operatorname{Vol} M/G \; t^{m/2}$$

Satz 2: Ist G endlich, so gilt

$$N(t) = \frac{\omega_m}{(2\pi)^m} \operatorname{Vol} M/G \; t^{m/2} + O\left(t^{\frac{m-1}{2}}\right).$$

Satz 3: Ist $G = S^1$, so existiert für $s \searrow 0$ eine asymptotische Entwicklung

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dN(t) \sim \frac{\omega_m}{(2\pi)^m} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \operatorname{Vol} M/G \; s^{\frac{-m}{2}} + $$

$$+ s^{\frac{-m-1}{2}} \sum_{\substack{0 \leq l \leq k \\ j \geq 0}} a_{lj} (\log s)^l \; s^{j/2}$$

Diese Ergebnisse wurden erzielt in Zusammenarbeit mit E. Heintze.

DORIN CIUMASU:

Topologische Strukturen eines Potenzreihenrings und verallgemeinerte Cauchy-Probleme

Gefragt ist, wann ein Iterationsverfahren für verallgemeinerte Cauchy-Probleme durchführbar ist. Seien I, J endliche Untermengen von $\mathbb{N}$ und $J = \mathbb{N}^I$. Vorgelegt sei das System: (1) $D^{r(j)}u_j(x) = f_j(x, D^{S(j)}u(x))$, $j \in J$, wobei $D^{S(j)} = \{D^{s(j,k)}u_k\}$, $r(j)$, $s(j,k) \in J$ und f_j analytische Funktionen sind (im allgemeinen Funktionen, die durch Potenzreihen darstellbar sind). Gesucht werden ähnliche Funktionen $u_j (j \in J)$, die das System (1) und "die Anfangsbedingungen" (2) $D_i^k u_j(x)|_{x_i=0} = 0$, $0 \leq k < r_i(j)$, $i \in I$, $j \in J$, befriedigen ($D_i^k = \partial/\partial x_i$, $D^r = \pi_{i \in I} D_i^{r_i}$, $r \in J$).

Dieses Problem wird in dem Potenzreihenring $F = A[[X_i; i \in I]]$ studiert. Ein übliches Iterationsverfahren wird benutzt.

In F werden die folgenden Topologien betrachtet: (a) $T(\omega)$: die Topologie der Norm $||\cdot|| = \exp(-\omega(\cdot))$ (ω die Ordnung einer Potenzreihe); (b) T_o: die Produkttopologie in F (A ein topologischer Ring); (c) T: die kanonische Topologie des Unterrings der konvergenten Potenzreihen. Es werden Bedingungen formuliert, unter denen ein Iterationsverfahren in den obigen Topologien konvergent ist. Es folgt die Existenz von zwei Klassen von Problemen, die durch ein Iterationsverfahren lösbar sind.

H. O. CORDES:

Pseudo-Differentialoperatoren, spezielle Liegruppen und eine globale Version des Egorovschen Satzes

1) Charakterisierung der Klasse ψL_o der ψdo's . A mit Symbol $a^{(\alpha)}_{(\beta)} = O(1)$ für $x,\xi \in \mathbb{R}^{2n}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}^n_+$ als beschränkte Operatoren von $G = L^2(\mathbb{R}^n)$: Notwendig und hinreichend ist, daß $e'_A(z,\xi) = e^{-i\xi M}e^{izD}Ae^{-izD}e^{i\xi M}$ über $\mathbb{R}^{2n}$ unendlich oft differenzierbar ist.

2) Ähnlich für die Klasse ψCL_o derart, daß beliebige endliche Anwendung der Operatoren ∂_{x_j}, ∂_{ξ_l}, $\varepsilon_{pq} = \xi_p\partial_{\xi_q} - x_p\partial_{x_q}$ auf das Symbol a stets eine beschränkte Funktion ergibt: $A \in L(\varphi)$ ist in ψCL_o d.u.n.d wenn $e_A = G^{-1}AG$ (mit $G = T_g e^{-izD}e^{i\xi M}$, $(T_g u)(x) = u(gx)$) eine unendlich differenzierbare Funktion auf der Liegruppe $\{(g,z,\xi): g \in GL(\mathbb{R}^n),\ z,\xi \in \mathbb{R}^n\}$ mit Operation $(g,z,\xi)\circ(g',z',\xi') = (gg',\ z+gz',\ \xi+g^{-t}\xi')$ darstellt.

3) Die Algebra ψCL_o ist invariant unter Konjugation mit dem Evolutionsoperator einer Gleichung $\frac{du}{dt} + iK(t)u = f$ für $K(t) = k(t,M_e,D)$, mit klassischem reellwertigen Symbol $k(t,x,\xi)$: $k^{(\alpha)}_{(\beta)}(t,x,\xi) = O((1+|x|)^{-|\beta|}(1+|\xi|)^{1-|\alpha|})$. Daraus ergeben sich rasch die bekannten Regeln über Fortpflanzung von Singularitäten längs charakteristischer Kurven.

H. L. CYCON:

Ein Störungssatz über die Stabilität der Selbstadjungiertheit bei Schrödingeroperatoren unter positiven Potentialstörungen

Wir führen verschiedene Klassen von Schrödingeroperatoren (S.O.-en) ein, bei denen die nicht negativen Elemente des Definitionsbereiches (des Abschlusses) geeignet approximiert werden können durch nicht negative C_0^∞-Funktionen (genannt S.O.-en mit fast positivem Definitionskern (f.p.D.K.), bzw. S.O.-en mit stark positivem Definitionskern (st.p.D.K.)) und zeigen, daß bei halbbeschränkten (h.b.-en)wesentlich selbstadjungierten (w.s.a.-en) S.O.-en die wesentliche Selbstadjungiertheit stabil bleibt unter beliebigen positiven L^2_{loc}-Störungen. In einem weiteren Satz wird gezeigt, daß bei Störung eines h.b.-en w.s.a.-en S.O.s T_o durch ein mit der relativen Schranke ≤ 1 T_o-beschränktes Potential gilt: st.p.D.K. von T_o impliziert f.p.D.K. des gestörten Operators. Damit können die bekannten Vergleichskriterien für wesentliche Selbstadjungiertheit in eine gemeinsame Struktur eingeordnet und erweitert werden.

G. DZIUK:

Das Verhalten von Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung an C^1 - Randkurven

Γ sei ein reguläres abgeschlossenes Kurvenstück der Klasse C^1 im $\mathbb{R}^n$. $x \in C^0(B,\mathbb{R}^n) \cap C^2(B,\mathbb{R}^n) \cap H^{1,2}(B,\mathbb{R}^n)$ erfülle in $B = \{(u,v) | u^2+v^2<1\}$

eine Differentialgleichung

(1) $$|\Delta x| \leq C \cdot |\nabla x|^2$$

und die Konformitätsrelationen $x_u^2 = x_v^2$, $x_u x_v = 0$.

Außerdem sei $x(\omega) \subset \Gamma$ für eine offene Menge $\omega \subset \partial B$. Dann ist für jede Menge $M \subset\subset \omega \cup B$: $x \in C^{0,\alpha}(M, \mathbb{R}^n)$ für jedes $\alpha \in (0,1)$.

Eine über B konform parametrisierte Fläche vorgeschriebener mittlerer Krümmung H im $\mathbb{R}^3$ erfüllt in B das Differentialgleichungssystem

$$\Delta x = 2H(x)\, x_u \wedge x_v$$

und damit eine Ungleichung (1), wenn H beschränkt ist.

VOLKER ENSS:

Asymptotische Vollständigkeit für Schrödingeroperatoren

Sei $H = H_o + W$ ein selbstadjungierter Schrödingeroperator auf $L^2(\mathbb{R}^\nu)$, etwa $H_o = -\Delta$, W ein Potential. Wir beweisen die asymptotische Vollständigkeit, d. H. $\Omega_{\mp} = \operatorname{s-lim}_{t \to \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_o t}$ hat als Wertebereich den gesamten kontinuierlichen Spektralraum von H. Hinreichende Bedingungen an W sind etwa:

$F(|\vec{x}| \leq R)\ (H+i)^{-1}$ kompakt $\forall\, R < \infty$ und

$\| W\ (H_o+i)^{-1}\ F(|\vec{x}| \geq R)\ \| =: h(R) \in L^1([0,\infty), dR)$, wobei $F(\cdot)$ die Projektion auf das bezeichnete Gebiet des $\mathbb{R}^\nu$ ist.

Die Beweismethode ist geometrisch, sie benutzt die Intuition von der Teilchenbewegung. Ruelle's Theorem garantiert, daß für einen Zustand aus dem kontinuierlichen Spektralbereich von H

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

das Teilchen sich beliebig weit vom Streuzentrum entfernt. Sodann zerlegt man den Zustand in ein- und aus-laufende Teile gemäß seinem Phasenraumträger: $\vec{p}\cdot\vec{x}+\vec{x}\cdot\vec{p} \leq 0$ bzw. > 0. Die auslaufenden Teile sind frei in der Zukunft, während die einlaufenden aussterben.

Die Methode ist anwendbar auf Conlomb-Systeme, gewisse Vielteilchensysteme, klassische lineare Wellengleichungen, u.s.w.

GAETANO FICHERA:

Integro-Differential Problems of Hereditary Phenomena

The first approach to the hereditary theory in continuum mechanics is due to L. Boltzman in 1874. About 30 years later V. Volterra formulated the first analytic theory of the integro-differential equations which arise in connection with material systems with a "memory". Volterra assumes a special hypothesis which enables to derive easily the existence and uniqueness theorems for the integro-differential problems under consideration. Actually Volterra assumes that the material system under consideration has forgotten everything of its history prior a certain instant t_0. More recently there has been a renewal of interest in this kind of problems and the question of the "fading" of the memory has been raised by Coleman and Noll when the Volterra hypothesis is rejected. The problem of existence and uniqueness are examined in the paper and it is shown that material systems with a strong memory could fail to exist.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

JENS FREHSE:

Quasi-lineare zweidimensionale elliptische Systeme

The author shows the existence of a Hölder continuous solution for a class of two-dimensional non-linear elliptic systems of the type

$$-\Sigma_{i=1}^{2}\partial_i a_i(x,u,\nabla u) + a_o(x,u,\nabla u) = o \quad .$$

The principal part of the equation ist required to satisfy a condition of uniform ellipticity and need not be in diagonal form. The lower order term a_o has at most quadratic growth in u and satisfies a one-side condition $a_o(x,u,\nabla u)\ u \geq -K$ or appropriate generalizations.

R. T. GLASSEY:

Decay of classical Yang-Mills Fields

The classical Yang-Mills equations in four-dimensional Minkowski space are invariant under the conformal group. The resulting conservation laws are explicitly exhibited in terms of the Cauchy data. In particular, it is shown that, for any finite-energy solution, the local energy tends to zero as $t \to +\infty$.

HANS GRABMÜLLER:

Variationelle Lösungen von parabolischen Integrodifferentialgleichungen

Abstrakte Anfangswertaufgaben vom Typ

$$(P)\begin{cases} u'(t) + \int_o^\infty k_1(t-s)\ u'(s)\ ds + Au(t) + \int_o^\infty k_2(t-s)\ Au(s)\ ds = f(t) \\ u(O) = u_o, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t>o) \end{cases}$$

resultieren zum Beispiel aus der Theorie der verallgemeinerten Wärmeleitung in Medien mit Gedächtnis (GURTIN-PIPKIN, MEIXNER, NUNZIATO) und aus der Analyse populationsdynamischer Vorgänge (FECHTER). Unter Heranziehung von Monotonie-Methoden wird eine Existenztheorie für Lösungen des Problems (P) entwickelt, die die Realisierung des linearen elliptischen Differentialoperators A auf einem durch unilaterale Randbedingungen festgelegten nicht-linearen Definitionsbereich D(A) voraussetzt. Dazu wird gezeigt, daß das Problem (P) äquivalent durch die Variationsungleichung

$$<(I + K)D_t u - \tilde{f},\ u - v > \leqq \Phi(v) - \Phi(u)$$

beschrieben werden kann. Hierin ist K ein Faltungsoperator, und Φ ist ein unterhalbstetiges konvexes Funktional. In der Lösungstheorie wird an entscheidender Stelle ein Charakterisierungssatz von FIRL über die maximale Monotonie des Faltungs-integrodifferentialoperators $(I + K)D_t$ verwendet.

S. HILDEBRANDT & K.-O. WIDMAN:

Liouville-Sätze für ganze Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme

Es wurden hinreichende (und in gewissem Sinne auch notwendige) Bedingungen angegeben, daß in ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Lösungen $u(x) = (u^1(x), \ldots, u^N(x))$ nichtlinearer elliptischer Systeme

$$-D_\beta \{a^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u) D_\alpha u\} = f(x,u,\nabla u)$$

mit

$$\lambda|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x,u(x),\nabla u(x),\nabla u(x))\ \xi_\alpha \xi_\beta \leq \mu|\xi|^2$$

$$|f(x,u(x),\nabla u(x))| \leq a|\nabla u(x)|^2 \quad ,$$

konstant sind. Ferner wurde angedeutet, wie sich Ergebnisse dieser Art zur Gewinnung von Bernstein-Sätzen für minimale Teilmannigfaltigkeiten einsetzen lassen.

HELMUT KAUL:

Eindeutigkeit und Stabilität von harmonischen Abbildungen und von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

M, N seien Riemannsche Mannigfaltigkeiten, M zusammenhängend, $\partial M \neq \emptyset$ und $f_1, f_2 : M \to N$ seien harmonische Abbildungen, d. h. Extremalen der Energie $E(f) = \frac{1}{2} \int_M |df|^2 \, d\,\mathrm{Vol}_M$. $\kappa > 0$ sei eine obere Schranke für die Schnittkrümmung von N.

Satz: (Jäger und Kaul) Wenn es eine streng konvexe Kugel $B_r(a) \subset N$ gibt mit

$$f_1(M),\ f_2(M) \subset B_r(a) \quad \text{und} \quad r < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$$

so gilt für die "Abstandsfunktion

$$\theta = \theta(f_1, f_2) : M \to \mathbb{R}\,,\ x \to \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1-\cos\sqrt{\kappa}\,\mathrm{dist}(f_1x, f_2x)}{\cos\sqrt{\kappa}\,\mathrm{dist}(a, f_1x) \cdot \cos\sqrt{\kappa}\,\mathrm{dist}(a, f_2x)}$$

das Maximumprinzip

$$\sup_M \theta \leq \sup_{\partial M} \theta\,.$$

Ein entsprechendes Resultat gilt auch für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) f = 0\,, \quad f : [0,T] \times M \to N\,,$$

wobei Δ der zu E gehörende Laplace-Beltrami-Operator ist.

HANSJÖRG KIELHÖFER:

Verzweigung periodischer Lösungen einer nichtlinearen Wellengleichung

Es geht um folgendes eindimensionales Schwingungsproblem:

$$(1)\quad \begin{cases} Lu = u_{tt} - u_{xx} = N(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in (0,\pi), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \text{oder} \quad u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \\ u(t+P,x) = u(t,x) \quad \text{für ein} \quad P > 0 . \end{cases}$$

Ist $N(0) = 0$, so hat man $u = 0$ als triviale Lösung (Ruhelage). Es erhebt sich die Frage, ob nichttriviale Lösungen von (1), sogenannte "freie Schwingungen", überhaupt existieren und ob solche aus der Ruhelage verzweigen. Die Nichtlinearität habe die Form

$$N(u) = \beta u + f(x,u,u_x,u_t), \quad f = o(|(u,u_x,u_t)|),$$

und erfülle folgende Bedingung:

f ist ungerade in (u,u_x) oder gerade in u_t.

Für die Linearisierung $L_\beta u = Lu - \beta u = 0$ hat man die Perioden

$P_n = 2\pi/\sqrt{n^2-\beta}$, $n^2 > \beta$, $n \in \mathbb{N}$. Für eine in $\mathbb{R}$ dichte Menge $\{\beta\}$ ist $P_n = 2\pi/\rho$, $\rho \in \mathbb{Q}$, für mindestens ein und höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Für die minimale Periode P_m unter diesen gilt: $\dim N(L_\beta) = 2$. Man erhält für $P = P_m$:

1) eine bis auf die Phase eindeutige formale Entwicklung

$$u = cv_0 + c^2 w_1 + \dots, \quad P = P_m + c^2 p_1 + c^4 p_2$$

in Abhängigkeit der Amplitude c;

2) einen bis auf die Phase eindeutigen lokalen Lösungszweig

$(u(c), \lambda(c))$, $\lambda(0) = 1$, des Problems

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$Lu = \lambda \beta u + f(\lambda,x,u)$$

Ein Beispiel ist die Sinus-Gorden Gleichung $u_{tt}-u_{xx} = \lambda \beta \sin x$.

RÜDIGER LANDES:

On the existence of weak solutions of quasilinear elliptic epuations

On a bounded domain Ω we consider the Dirichlet-problem for a quasilinear elliptic equation of order 2 m :

$$(*) \begin{cases} A(u) = f & \text{in } \Omega \\ D^{\alpha}(u) = 0 & \text{in } \Omega \text{ for } |\alpha| < m-1 \end{cases}$$

$$A(u) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} \left(A_{\alpha}(x,D(u)\right) \ : \ D(u) := (u,\ldots,D^{m}(u))$$

where $A(u)$ satisfies a monotonicity condition.

By the ellipticity condition we get a sequence of Galerkin-solutions $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $u_n \to u_o$ in $H_o^{m,1}(\Omega)$.

We may conclude that u_o is a wak solution of $(*)$, if we are able to prove two specific properties for the sequences $\{A_{\alpha}(x,D(u_n))\}_{n=1}^{\infty}, |\alpha| \leq m$. We give four examples of operators for which we are able to prove these properties.

JEAN LERAY:

Lagrangian analysis and quantum mechanics

(A mathematical structure connected with assymptotic expansions and Maslov index.)

A detailed description of that structure exists as a preprint in French (available at the Collège de France, 75231 Paris-Cedex 05

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

or at R.C.P. 25, I.R.M.A, 67084 Strasbourg-Cedex) ; completed by some additions it shall be published in English by M.I.T.Press and also in Russian.

Here we restrict us to the presentation of that structure: what follows in nothing else than the foreword of its detailed description.

*

* *

Physicists use exact solutions, $u(x)$, of evolution problems only in the simplest cases. Otherwise they make use of «assymptotic solutions» of the type:

(1) $$u(\nu,x) = \alpha\ (\nu,x)\ e^{\nu\varphi(x)}\ ,$$

where:

- the «phase» φ is a real valued function of $x \in X = R^1$;
- the «amplitude» α is a formal series of $\frac{1}{\nu}$:

$$\alpha(\nu,x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^r}\,\alpha_r(x),$$

whose coefficients α_r are complex valued functions of x ;

- the «frequency» ν is a purely imaginary parameter .

The differential equation governing the evolution:

(2) $$a(\nu,\ x\ ,\ \frac{1}{\nu}\ \frac{\partial}{\partial x})\ u\ (\nu,x) = 0$$

is satisfied as follows: its right member reduces to the product by $e^{\nu\varphi}$ of a formal series of $\frac{1}{\nu}$, whose first terms or whose all terms vanish. The construction of those asymptotic solutions is well known and called W.K.B. method:

- the phase φ has to satisfy a first order differential equation, which is non linear if a is not of first order;
- the amplitude α is computed by integrations along these characteristics of that first order equation, which define φ .

In quantum mechanics, for instance, computations are made as if

$$\nu = \frac{i}{\hbar} = \frac{2\pi i}{h} \quad (h : \text{Planck's constant})$$

were a parameter tending to $i\infty$; afterwards ν receives its numerical value ν_o.

Physicists construct asymptotic solutions of equilibrium problems and of periodical problems; thus for instance, they replace problems of wave optics by problems of geometrical optics. But φ has jump and α has singularities on the envelope of the characteristics which define φ ; for instance, in geometrical optics, on the caustics, which are the images of the sources of light; nevertheless geometrical optics holds beyond the caustics.

In a very general manner V.P.MASLOV introduced an index (whose definition was clarified by I.V.ARNOLD), which describes those phase jumps, and he showed by a convenient use of Fourier transform how those amplitude singularities are only apparent singularities. But he had to impose some «quantum conditions» ; their statement assumes ν to have some purely imaginary numerical value ν_o , in contradiction with the previous assumption about ν , namely that ν is a parameter tending to $i\infty$; now that previous

assumption is necessary in order that Fourier transform is pointwise, what is essential for V.P.Maslov. A manner, avoiding that contradiction and guided by pure mathematical motivations, of using Fourier transform, expressions of type (1) Maslov's quantum conditions and a given number ν_o is possible, if it does no more intend to define some function or some asymptotic class of functions by its asymptotic expansion. It leads to a new mathematical structure, «the lagrangian analysis», which requires the datum of the constant ν_o and is based on the symplectic geometry; its interest can only appear a posteriori and could be quantum mechanics; indeed that structure allows a new interpretation of Schrödinger's, Klein-Gordon's and Dirac's equations, providing

$$\nu_o = \frac{i}{\hbar} = \frac{2\pi i}{h}\text{, where } h \text{ is Planck's constant.}$$

Therefore the real number $\frac{2\pi i}{\nu_o}$ to be choosen for defining that new mathematical structure can be called: «Planck's constant» .

OTTO LIESS:

Ausbreitung von Singulatitäten für partielle Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten

Consider $p(D)$ a linear p.d.o. with constant coefficients, $p(\xi)$ its associated polynamial, $\xi^o \in R^n \setminus \{0\}$ a characteristic vector for $p(D)$ and $x^o \in R^n$ {0} a direction. We will say that there is propagation of singularities for $(p(D),\xi^o,x^o)$ if the

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

following happens:

for every convex $\omega \subset R^n$ and every $u \in D'(\omega)$ with $p(D)u = 0$ it follows that $(y,\xi^o) \in WF_A u$ if $(x,\xi^o) \in WF_A u$, $x,y \in \omega$, $x \cdot y = \lambda x^o$ for some $\lambda \in R$ ($WF_A u$ = wave front set of u).

The main result is: there are equivalent

(i) There is propagation of singularities for $(p(D),\xi^o,x^o)$.

(ii) For every $d'>0$, every $\varepsilon'>0$, every open cone $\Gamma' \subset R^n \setminus \{0\}$, $-\xi^o \in \Gamma'$, there are $d>0$, $b>0$, $c>0$, an open cone $\Gamma \subset R^n \setminus \{0\}$, $-\xi^o \in \Gamma'$, and plurisubharmonic functions $\varphi \pm : C^n \to R$ such that

$$\min (d|\mathrm{Re}\zeta|_\Gamma, \langle \pm x^o, \mathrm{Im}\zeta\rangle_+) \leq \psi \pm (\zeta) \leq$$

$$\leq \min (d'\mathrm{Re}|\zeta|_{\Gamma'}, \langle \pm x^o, \mathrm{Im}\zeta\rangle_+) + \varepsilon'|\mathrm{Im}\zeta| + b \ln (1+|\zeta|) + c$$

for $p(-\zeta) = 0$.

Here $|\xi|_\Gamma = |\xi|$ if $\xi \in \Gamma$, and $|\xi|_\Gamma = 0$ if $\xi \notin \Gamma$ and $a_+ = \max (a,0)$ for $a \in R$.

G. LUMER:

<u>Approximation of solutions of evolution equations for local and elliptic operators</u>

We consider evolution equations $\partial u/\partial t = Au$, $u(o,\cdot) = f(\cdot)$, with zero boundary values, in uniform norm context, A being a second order elliptic operator, or more generally a local operator. [For the terminology used below, in particular "cauchy problem" (c.p.), "Cauchy problem with countinuous boundary values" (c.c.p.), etc., and other details, see: G. Lumer "Problème de

Cauchy ...", Ann. Inst. Fourier, 25 (1975) fasc. 3 et 4, 409-446; - C. R. Acad. Sci. Paris, 281 (1975); - C. R. Acad. Sci. Paris (1977), 1435-1437]. For more details on the approximation result considered here see [G. Lumer, C. R. Acad. Sci. Paris, 288 (1979), 189-192]. In classical context the approximation result is as follows:

<u>Theorem.</u> Let Ω be an open non-empty subset of R^N, $A(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq 2} c_\alpha(x)D^\alpha$ an elliptic operator defined on Ω, the c_α being real, measurable, locally bounded, and continuous for $|\alpha| = 2$, with $c_o \leq 0$ on Ω. We denote by A the local operator defined by $A(x,D)$ in Ω, and we assume the Cauchy problem corresponding to A is solvable for Ω. Let R be the collection of all very regular open relatively compact sets $\subset\subset \Omega$. Then $\exists$ a sequence of $G_n \in R$, $\bar{G}_n \subset \Omega$, $G_n \uparrow \Omega$, and elliptic operators $A_n(x,D)$ on open $\Omega_n \subset\subset \Omega$, $\bar{G}_n \subset \Omega_n$, the $A_n(x,D)$ being exactly of the same kind as $A(x,D)$ except that all their coefficients are C^∞, and oo that the following approximation holds: if $f \in C_o(\Omega)$, $u(t,f)$ is the solution of the Cauchy problem corresponding to A, for Ω, with initial value f, and $u_n(t,f|\bar{G}_n)$ is the solution (which exists) of the "Cauchy problem with continuous boundary values" for G_n, corresponding to the local operator A_n defined by $A_n(x,D)$, with initial value $f|\bar{G}_n$, then $\| u(t,f)|\bar{G}_n - u_n(t,f|\bar{G}_n)\|_{C(\bar{G}_n)} \to 0$ as $n \to \infty$, uniformly on compact time intervals.

Actually, a more general result is obtained, valid in the general

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

context of local operators, and applicable in particular to certain situations which arise from the "patching" of infinitely many differential operators.

MARIO MIRANDA:

Dirichlet Problem for minimal surface equation on unbounded domain

Theorem. "If $\Omega \subset R^n$ is convex, unbounded, $\partial\Omega \neq \emptyset$ and Ω is not a half space, then $\forall$ real continuous functions g defined on Ω such that

(1) $f|_{\partial\Omega} = g$, (2) f is analytic in Ω and $\mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{grad}\ f}{\sqrt{1+|\mathrm{grad}\ f|^2}}\right)\Big|_{\Omega} = 0$."

Proof. $\forall\ \rho>0$ let us denote $B_\rho(x_o) = \{x\in R^n \mid |x-x_o|<\rho\}$ where x_o is a fixed point of $\partial\Omega$, and consider a function f_ρ analytic in $B_\rho(x_o)\cap\Omega$, continuous up to $\partial\Omega \cap B_\rho(x_o)$ and such that

(1) $f_\rho\Big|_{\partial\Omega\cap B_\rho(x_o)} = g\Big|_{\partial\Omega\cap B_\rho(x_o)}$, (2) $\mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{grad}\ f_\rho}{\sqrt{1+|\mathrm{grad} f_\rho|^2}}\right)\Big|_{\Omega\subset B_\rho(x_o)} = 0$

We are able to prove, by using the geometric properties of Ω, that $\exists$ an increasing sequence $\rho_h \to +\infty$ such that

$$f_{\rho_h}(x) \underset{h\to\infty}{\to} f(x) \qquad \forall\ x \in \Omega$$

and the function $f(x)$ is the solution of our problem.

CLAUS MÜLLER:

Die Sommerfeld'sche Darstellung der Hankelfunktion als Beispiel zum mehrdimensionalen Residuenkalkül von Leray

Das von Sommerfeld eingeführte Integral

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{\mathcal{L}} e^{i(x_1 \cos t + x_2 \sin t)} dt$$

zur Darstellung der Funktion $\frac{1}{4i} H_o^{(1)}(r)$

wird über den mehrdimensionalen Residuenkalkül aus dem Integral

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathcal{F}} \frac{e^{i(x_1 z_1 + x_2 z_2)}}{z_1^2 + z_2^2 - 1}\, d z_1 \ d z_2$$

eine geeignete Wahl der Fläche $\mathcal{F}$ des C^2 abgeleitet.

JOHANNES C. C. NITSCHE:

A uniqueness theorem for surfaces of least area with partially free boundaries on obstacles

The existence proofs for minmal surfaces of least area with free, or partially free boundaries on fixed supports do not exclude the occurrence of branch points. In a branch point of odd order the free boundary possesses a cusp. Cusps can be observed experimentally. The lecture provides a mathematical discussion of special situations in which cusps of the free boundary must appear, as well as other situations where cusps cannot be present. One of the main tools for the proofs is a new uniqueness theorem.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H. PECHER:

Reguläre Lösungen semilinearer Wellengleichungen

Es wird das Cauchy-Problem für nichtlineare Wellengleichungen der Form $u_{tt} + Au + f(u,\dots,D^m u,u_t) = 0$, $u = u(x,t)$, $x\in\mathbb{R}^n, t\geq 0$,

$$u(x,0) = \varphi(x),\quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

betrachtet, wobei A ein positiver elliptischer selbstadjungerter Differential-Operator 2m-ter Ordnung ist. Erfüllt die Nichtlinearität eine Vorzeichenbedingung, so ist unter Wachstumsbedingungen an f und Einschränkungen an die Dimension n die Existenz einer klassischen globalen Lösung für alle $\varphi\in H^k(\mathbb{R}^n)$, $\psi\in H^{k-m}(\mathbb{R}^n)$ (k hinreichend groß) sichergestellt. Beispiele:

$$u_{tt}+(-\Delta)^m u + u_t^3 = 0 \quad \text{für} \quad n < 2^m$$

$$u_{tt}+(-\Delta)^m u + \prod_{0\leq|\alpha|\leq\varkappa_0-1}(D^\alpha u)^{2q_\alpha} \prod_{|\alpha|=\varkappa_0}(D^\alpha u)^2 u_t = 0 \quad \text{für} \quad n\leq 2m-2\varkappa_0$$

$$q_\alpha\in\mathbb{N} \text{ beliebig}$$

$$u_{tt}+(-\Delta)^m u + \prod_{0\leq|\alpha|\leq m} \sin(D^\alpha u)\sin u_t = 0 \quad \text{für} \quad n\leq 2m$$

$$u_{tt}+(-\Delta)^m u + (-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\sigma_\alpha(D^\alpha u)) = 0,$$

wobei $\sigma_\alpha(s) := |s|^{\rho-1}s$ für $|s|\geq 1$, $\sigma_\alpha\in C^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, $\sigma_\alpha(s)s\geq 0$

$\forall s\in\mathbb{R}$, $n\leq 2(m-|\alpha|-1)+\frac{2(m-|\alpha|)}{|\alpha|}$, $(|\alpha|>0)$, $\rho\leq\frac{n-2|\alpha|}{n-2m+2|\alpha|}$ $(n>2m-2|\alpha|)$,

$\rho < \infty$ $(n=2m-2|\alpha|)$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

RAINER PICARD:

Potentialtheorie auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nicht-glattem Rand (Aus Zeitgründen konnte dieser Vortrag nicht gehalten werden).

Es wird zunächst die Frage nach der Anzahl linear unabhängiger Lösungen des Systems

$$\mathrm{rot}\ \omega = 0$$

$$\mathrm{div}\ \omega = 0$$

(q-Form mit L_2-Komponenten, rot "schwache" Cartan-Ableitung div "schwache" Co-Ableitung), in einer berandeten topologischen Untermannigfaltigkeit G einer Riemannschen C_∞-Mannigfaltigkeit unter Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingung im Rahmen von Hilbertraummethoden untersucht.

Im Anschluß daran sollen die inhomogenen Gleichungen unter derselben Randbedingung betrachtet werden, um Existenz- und Eindeutigkeitsfragen in Bezug auf Lösungen des Systems zu klären.

F. SCHULZ:

Innere Abschätzungen für Lösungen nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung in n Variablen

Für strikt konvexe Lösungen $u(x)$ allgemeiner elliptischer Differentilagleichungen $F(x,u,Du,D^2u) = 0$ gelingt es, die inneren Hölder-Normen der zweiten Ableitungen a priori abzuschätzen, wenn F im wesentlichen nur einmal stetig differenzierbar ist, und falls eine quantitative Einschränkung an das Konvexitätsverhalten von u erfüllt ist.

Diese Voraussetzung ist beim mehrdimensionalen Minkowski-Problem erfüllt, wenn die Gaußsche Krümmung nur wenig oszilliert. Bei elliptischen Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) = f(x,u(x),Du(x))$$

können die inneren L^2-Normen der dritten Ableitungen von Lösungen $u(x)$ a priori abgeschätzt werden, falls f nur einmal stetig differenzierbar ist.

Hiermit werden Arbeiten von von Wahl und Ivanov fortgeführt.

R. SEELEY:

Asymptotic Remainder estimates for Eigenvalues of the Laplacian with Boundary Conditions

Courant's Estimate

$$N(\lambda) = \frac{|G|}{6\pi^2}\lambda^{3/2} + O\,(\lambda\log\lambda)$$

is improved to $O(\lambda)$, which is best possible.

Here $G \subset R^3$ is smooth and compact, and $N(\lambda)$ is the number of Eigenvalues $\lambda_j \leq \lambda$ for the Laplacian Δ with Dirichlet Boundary Conditions. The proof uses the wave equation. Some progress has been made toward the case where G is a compact manifold with boundary.

C. G. SIMADER:

Eindeutigkeit und Stabilität für gewisse schwache Lösungen nichtlinearer elliptischer Gleichungen

In der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^N$ sei die elliptische Bilinearform

$B[u,\phi] = \int\limits_G \sum\limits_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta \phi dx \quad (u,\phi \in C_o^\infty(G),\ a_{\alpha\beta} \in L^\infty(G))$ gegeben.

Weiter sei $B[u,u] \geq C\|u\|^2_{m,2}$ $(C>0,\ u \in H_o^{m,2}(G)$, alle Funktionen reellwertig). Für $|\alpha| \leq m$ seien $g_\alpha \in C^o(\mathbb{R})$, $g_\alpha(t)t \geq 0$, g_α monoton wachsend. Ist zusätzlich $g_\alpha(t)t$ konvex für $|\alpha| = m$, so gibt es zu jedem $f \in L^2(G)$ ein $u \in H_o^{m,2}(G)$ mit

(*) $g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha u \in L^1(G)$, $g_\alpha(D^\alpha u) \in L^1(G)$ $(|\alpha| \leq m)$

und

(**) $B[u,\phi] + \sum\limits_{|\alpha|\leq m} (g_\alpha(D^\alpha u), D^\alpha \phi) = (f,\phi) \quad \forall \phi \in C_o^\infty(G)$.

Es wurde die Eindeutigkeit und Stabilität der schwachen Lösungen von (**) in der Klasse (*) untersucht. Unter der Annahme, daß G sternförmig ist und für $|\alpha| \leq m$ Konstanten $K_\alpha \geq 1$ mit $|g_\alpha(-t)| \leq K_\alpha |g_\alpha(t)|$ $(t \in \mathbb{R})$ existieren, wurde mittels eines einfachen Approximationsprozesses gezeigt, daß für die Lösungen $u^{(i)}$ von (**) zu vorgegebenem $f^{(i)}$ mit Eigenschaft (*) $(i=1,2)$ gilt:

$B[u^{(1)}-u^{(2)}, u^{(1)}-u^{(2)}] + \sum\limits_{|\alpha|\leq m} (g_\alpha(D^\alpha u^{(1)}) - g_\alpha(D^\alpha u^{(2)}), D^\alpha u^{(1)} - D^\alpha u^{(2)}) =$

$= (f^{(1)}-f^{(2)}, u^{(2)}-u^{(2)})$, woraus wegen der Monotonie der g_α das gewünschte Resultat

$C\, \|u^{(1)}-u^{(2)}\|_{m,2} \leq \|f^{(1)}-f^{(2)}\|_o$ folgt.

ENGELBERT TAUSCH:

Central Projetions of Minimal Surfaces

In [1] § 939 a variational problem is mentioned which corresponds to central projection of minmal surfaces:

$$(*)\quad \begin{cases} \int\limits_{\Omega} e^{n\cdot u}.\{|\nabla u|^2+(1+x\cdot\nabla u)^2\}^{1/2}dx \to \min \\ u\big|_{\partial\Omega} = \phi \qquad \underline{n=2} \end{cases}$$

This problem was first considered by T. Rado in [2], when he proved: A Jordan-curve in R^3 which allows a central projection upon a plane convex curve bounds exactly one minimal surface. T. Rado proved that in this situation the Plateau problem is equivalent to (*) and as the Euler equation of (*) is of the type $A_{ij}(x,\nabla u)u_{ij}=|\nabla u|^2$, this implies the uniqueness of the minmal surface. From this one could get the idea to prove not only uniqueness of this special Plateau problem with the aid of (*) but also existence and this should work for arbitrary dimensions. By this method we shall show that the theorem of Rado holds for each $n\geq 2$, i.e. a boundary of a hypersurface in R^{n+1} which allows a central projetion upon the boundary of a convex set in $R^n x\{0\}$ bounds exactly one hypersurface with least area and this hypersurface is analytic.

[1] J.C.C.Nitsche: "Vorlesungen über Minmalflächen" 1975

[2] T.Rado: "Contributions to the Theory of Minimal Surfaces" 1932

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

N. S. TRUDINGER:

Linear Elliptic Operators with Meassurable Coefficients

We consider operators of the form

$$Lu = -D_i\ (a^{ij}D_j u + a^i u) + b^i D_i u + bu$$

with coefficients $a^{ij}, a^i, b^i, b,\ (i,j = 1,\dots,n): \Omega \to \mathbb{R}$, measurable, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. The operator L is assumed to be elliptic in Ω, in the sense that the coefficient matrix $A = [a^{ij}]$ is positive a.e. in Ω, but is not assumed to be either uniformly elliptic or strictly elliptic. The following results are discussed:

(1) Weak maximum principle for general boundary conditions (in particular, mixed boundary value problems).

(2) Weak strong maximum principles for local subsolutions.

(3) Simplicity of first eigenvalue.

WOLF VON WAHL:

Analytische Abbildungen und semilineare Differentialgleichungen in Banachräumen

Zunächst werden gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u' + A(t)u + M(t,u) &= 0 \\ u(0) &= \varphi \end{aligned}$$

in einem Banachräum B betrachtet. Dabei ist die Nichtlinearität M eine lokal lipschitzstetige Abbildung von B in sich. Es wird gezeigt, daß jede schwache Lösung, d.h. Lösung der IGL

$$u(t) = \mathcal{U}(t,0)\varphi + \int_0^t \mathcal{U}(t,x)M(s,u(s))ds$$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

lipschitzsktig in t ist. Dabei ist $U(t,s)$ der zu den $A(t)$ gehörige Evolutionsoperator, $D(A(t)) = D(A(0))$ und $\phi \in D(A(0))$. Falls B reflexiv ist, ist die schwache Lösung in ihrem Existenzintervall auch Lösung der Differentialgleichung.

Anschließend wird die Regularität der Lösung, d.h. die Frage, ob $u(t)$ im Definitionsbereich gewisser Potenzen $D(A^k(t)), k \geq 1$, liegt untersucht. Im parabolischen Fall und bei den Gleichungen von Navier-Stokes ist dafür der Begriff der analytischen Abbildung M von Nutzen. Wenn M eine analytische Abbildung von $D(A^{\alpha_1}(t))$ in $D(A^{\beta_1}(t))$ und eine solche von $D(A^{\alpha_2}(t))$ in $D(A^{\beta_2}(t))$ ist, $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_1 \geq 0$, ist, so bildet M auch die zwischen α_1 und α_2 liegenden Definitionsbereiche $D(A^{\gamma}t))$ in die entsprechenden, zwischen $D(A^{\beta_1}(t))$ und $D(A^{\beta_2}(t))$ liegenden Definitionsbereiche $D(A^{\delta}(t))$ ab. Da sich die vorausgesetzten Abbildungseigenschaften bei vielen Nichtlinearitäten leicht nachweisen lassen, kann man, von $u(t) \in D(A^{\alpha_1}(t))$ beginnend und in endlich vielen Schritten aufsteigend, schließlich zeigen, daß $u(t) \in D(A^{\alpha_2}(t))$ ist.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

WOLFGANG WALTER:

Systeme von parabolischen Funktional-Differentialgleichungen mit starker Kopplung

Betrachtet werden zunächst parabolische Systeme der Gestalt

$$u_t^k = f_k(t,x,u^k,u_x^k,u_{xx}^k,u(\cdot)) \qquad (k=1,\dots,m)$$

wobei $x \in R^n$, $u = (u^1,\dots,u^m)$ ist und die Schreibweise $u(\cdot)$ andeuten soll, daß eine funktionale Abhängigkeit von Werten $u(\tau,\xi)$ für $\tau \le t$ vorliegt. Es wird ein Abschätzungssatz formuliert, der auf einer einseitigen Lipschitz-ähnlichen Abschätzung von f basiert. Um auch stark gekoppelte Systeme behandeln zu können - ein Beispiel ist

$$u_t = au_{xx} + g\ (u,v,u_x,\underline{v_x}) \qquad (a,\bar{a} \ge 0)$$

$$v_t = \bar{a}v_{xx} + \bar{g}\ (u,v,\underline{u_x},v_x)$$

wird eine n-dimensionale Verallgemeinerung einer auf Hardy-Littlewood, Kolmogoroff, Gorny u.a. zurückgehenden Abschätzung

$$(1) \quad U_k < A(k,d)\ U_o^{1-k/d}\ U_d^{*k/d} \quad \text{für} \quad u \in C^d(J,R),$$

mit $U_k = \sup\{|u^{(k)}(t)|: t \in J\}$, $h = |J|$ und

$$U_d^* = \max\ \{U_d, U_o \cdot h^{-1}\}$$

herangezogen. Die Abschätzung (1) gilt auch für $u = u(x) \in C^d(\Omega,B)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, B Banachraum, $U_k = \sup\{|D^\alpha u|: |\alpha| = k, x \in \Omega\}$, falls $\Omega \in K(\gamma,h)$ ist (d.h. zu jedem $x \in \Omega$ gibt es einen Kegel $K_x \subset \Omega$ mit Öffung γ, Höhe h und Spitze bei x).

Damit lassen sich auch gewisse stark gekoppelte Systeme behandeln. Ein Beispiel ist

$$(2)\quad \begin{aligned} u_t &= au_{xx} + bu + cv + du_x v_x + evv_x + fuv_x \\ v_t &= \bar{a}v_{xx} + \bar{b}u + \bar{c}v + \bar{d}u_x v_x + \bar{e}uu_x + \bar{f}vu_x \end{aligned}$$

mit beschränkten Koeffizienten.

Für (2) gilt Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von Anfangs- und Randwerten, falls

$$U^2(t) = \sup_x \{|u_{xx}(t,x)|, |v_{xx}(t,x)|\} < \infty \text{ ist.}$$

Dagegen kann man Gegenbeispiele der Art

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} + b[|u_x|+|v_x|] \qquad (a,\bar{a}\geq o) \\ v_t &= \bar{a}v_{xx} + \bar{b}[|u_x|+|v_x|] \end{aligned}$$

mit stetigen, beschränkten Koeffizienten $a,\bar{a},b,\bar{b}$ angeben, zu denen es nichtverschwindende Lösungen (u,v) in G: $x>o, t>o$ mit Randwerten 0 für $x = o$ und $t = o$ gibt.

Diese Ergebnisse entstanden in gemeinsamer Arbeit mit Ray Redheffer (UCLA).

KARL J. WITSCH:

Ein Eindeutigkeitsresultat zu einer freien Randwertaufgabe aus der physikalischen Geodäsie

Zu dem Problem, aus Messungen des Erdpotentials und der Erdschwere an der Erdoberfläche die Erdgestalt zu bestimmen, wird ein lokaler Eindeutigkeitssatz bewiesen: in einer C^1-Umgebung

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

einer gewissen Normalfläche existiert höchstens eine "Randfläche", die zu den gemessenen Daten "paßt". Die Größe obiger Umgebung kann (von unten) abgeschätzt werden. In diese Abschätzungen gehen (gewichtete) L_2-Schranken für die zweiten Ableitungen der Lösung eines speziellen schiefachsigen elliptischen Randwertproblems wesentlich ein. Diese Schranken werden explizit bestimmt.

RAINER WÜST:

Spektraleigenschaften von Dirac-Operatoren mit singulärem Potential

Im Hilbertraum $H := (L^2(\mathbb{R}^3))^4$ sei

$T_o := \overline{(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta)\restriction D_o}$ $\left(D_o := (C_o^\infty(\mathbb{R}^3_+))^4\right)$ der freie Dirac-Operator, q ein Potential mit $\mu := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^3_+} |xq(x)| < \infty$ und $T := (T_o + q)\restriction D_o$. Ist $\mu < 1$, so ist T i.a. nicht wesentlich selbstadjungiert. Mit Hilfe von cut-off-Potentialen kann jedoch gezeigt werden, daß $\tilde{T} := T^*\restriction(D(T^*)\cap D(r^{-1/2}))$ eine (physikalisch ausgezeichnete) selbstadjungierte Fortsetzung von T ist, (r = Multiplikation mit $|x|$). Es gilt dann ferner:

$\tilde{T} = \tilde{\tilde{T}}$ mit $\tilde{\tilde{T}} := T^*\restriction\left(D(T^*)\cap D(|T_o|^{1/2})\right)$,

$\sigma_{ess}(\tilde{T}) = \sigma_{ess}(T_o)$ $(= \sigma(T_o) = \mathbb{R}\setminus(-1,1))$,

$(-\sqrt{1-\mu^2},\ \sqrt{1-\mu^2}) \subset \rho\ (\tilde{T})$,

und: $q\leq o \Rightarrow (-1,\sqrt{1-\mu^2})\subset\sigma(\tilde{T})$,

$q\geq o \Rightarrow (-\sqrt{1-\mu^2},\ 1)\subset\sigma(\tilde{T})$.

Die Schranken sind scharf, wie am Beispiel des reinen Coulomb-Potentials $\pm \frac{\mu}{|x|}$ zu sehen ist.

Berichterstatter: C. G. Simader (Bayreuth)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Liste der Tagungsteilnehmer

Alt, Dr. H. W., Institut für Angewandte Mathematik der
Universität Heidelberg,
Neuenheimer Feld 294, 6900 Heidelberg

Alt, Dr. W., Institut für Angewandte Mathematik der
Universität Heidelberg,
Neuenheimer Feld 294, 6900 Heidelberg

Bemelmans, Dr. J., Mathematisches Institut der Universität
Bonn, Wegelerstraße 10, 5300 Bonn

Böhme, Prof. Dr. R., Fachbereich Mathematik und Physik der
Universität Erlangen-Nürnberg,
Universitätsstraße 40, 8520 Erlangen

Bojarski, Prof. Dr. B., Warsaw University, Dept. of Mathematics
PKiN IX p, Warszawa 00901, (Polen)

Brenner, Dr. P., Chalmers University of Technology and
University of Göteborg, Department of Mathe-
matics, Fack, S-40220 Göteborg (Schweden)

Browder, Prof. Dr. F. E., Department of Mathematics,
University of Chicago, 5734 University Ave.,
Chicago, Illinois 60637, (USA)

Brüning, Prof. Dr. J., Mathematisches Institut der Universität
München, Theresienstr. 39, 8000 München 2

Bureau, Prof. Dr. F., 5 Place d' Italie, B-4020 Liege (Belgien)

Ciumasu, Dr. D., z.Zt. Stifterstraße 20, 7320 Göppingen

Cordes, Prof. Dr. H. O., 844 Oxford Str., Berkeley, Calif. 94707 (USA)

Cycon, Dipl.-Math. H. L., Fachbereich Mathematik der TU Berlin, Straße des 17. Juni 135, 1 Berlin

Dziuk, Dr. G., Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Mathematik der RWTH Aachen, Templergraben 55, 5100 Aachen

Enss, Prof. Dr. V., Fakultät für Physik der Universität Bielefeld, Universitätsstraße, 4800 Bielefeld 1

Fichera, Prof. Dr. G., Via Pietro Mascagni 7, I-00199 Roma (Italien)

Frehse, Prof. Dr. J., Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn, Beringstr. 4-6 , 5300 Bonn

Glassey, Prof. Dr. R. T., Indiana University, Department of Mathematics, Bloomington, Indiana, 47401 (USA)

Grabmüller, Prof. Dr. H., Mathematisches Institut der Universiät Erlangen-Nürnberg, Bismarckstr. 1 1/2, 8520 Erlangen

Haack, Prof. Dr. W., Königsallee 55 b, 1000 Berlin 33

Heinz, Prof. Dr. E., Mathematisches Institut der Universität Göttingen, Bunsenstr. 3-5, 3400 Göttingen

Hellwig, Prof. Dr. G., Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Mathematik der RWTH Aachen, Templergraben 55, 5100 Aachen

Hildebrandt, Prof. Dr. St., Mathematisches Institut der Universität Bonn, Wegeler Str. 10, 5300 Bonn

Hile, Prof. Dr. G. N., Department of Mathematics, University of Hawaii, Manoa, Honolulu, Hawaii, 96822 (USA)

Hölder, Prof. Dr. E., Fachbereich Mathematik der Universität Mainz, Saarstr. 21, 6500 Mainz

Kalf, Prof. Dr. H., Fachbereich Mathematik der TH Darmstadt, Schloßgartenstr. 7, 6100 Darmstadt

Kaul, Prof. Dr. H., Mathematisches Institut der Universität Tübingen, Auf der Morgenstelle 10, 7400 Tübingen

Kielhöfer, Prof. Dr. H., Institut für Angewandte Mathematik und Statistik der Universität Würzburg, Am Hubland, 8700 Würzburg

Kröner, Dipl.-Math. D., Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Mathematik der RWTH Aachen, Templergraben 55, 5100 Aachen

Landes, Dr. R., Mathematisches Institut der Universität Bayreuth, Universitätsgelände, 8580 Bayreuth

Leray, Prof. Dr. J., Collège de France - Mathématiques, F-75231 Paris - Cedex 05 (Frankreich)

Liess, Dr. O., Georgenstr. 24 A, 8900 Augsburg (bei K. Adleff)

Louhivaara, Prof. Dr. I. S., Institut für Mathematik der Freien Universität Berlin, Hüttenweg 9, 1 Berlin 33

Lumer, Prof. Dr. G., Mathématique Université de l'Etat, Av. Maistrian, 15, 700 Mons (Belgien)

Miranda, Prof. Dr. M., Facoltá di Scienze, I-38050 Povo, Trento (Italien)

Müller, Prof. Dr. C., Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik der RWTH Aachen, Templergraben 55, 5100 Aachen

Müller, Dipl.-Math. D., Mathematisches Institut der Universität Göttingen, Bunsenstr. 3-5, 3400 Göttingen

Niemeyer, Prof. Dr. H., Lehrstuhl I für Mathematik der RWTH Aachen, Augustinerbach 2a, 5100 Aachen

Nitsche, Prof. Dr. J.C.C., School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota 55455 (USA)

Pecher, Prof. Dr. H., Fachbereich Mathematik der Universität Wuppertal, Gaußstr. 20, 5600 Wuppertal

Picard, Dr. R., Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn, Wegelerstr. 6, 5600 Bonn

Ruchert, Dr. H., Fachbereich Mathematik der Universität Saarbrücken, Bau 27, 6600 Saarbrücken

Schneider, Prof. Dr. M., Fachbereich Mathematik der TU Berlin, Straße des 17. Juni 135, 1 Berlin

Schulz, Dr. F., Mathematisches Institut der Universität Göttingen, Bunsenstr. 3-5, 3400 Göttingen

Seely, Prof. Dr. R., Mathematics Department, University of Massachusets, Boston Ma., 02125 (USA)

Simader, Prof. Dr. C.G., Mathematisches Institut der Universität Bayreuth, Universitätsgelände, 8580 Bayreuth

Ströhmer, Dr. G., Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Mathematik der RWTH Aachen, Templergraben 55, 5100 Aachen

Tausch Dr. E., Mathematisches Institut der Universität Bonn, Wegelerstr. 10, 5300 Bonn

Tomi, Prof. Dr. F., Fachbereich Mathematik der Universität Saarbrücken, Bau 27, 6600 Saarbrücken

Trudinger, Prof. Dr. N.-S., Dept. of Pure Mathematics, Australian National University Canberra, A.C.T. 2600 (Australien)

Veselić, Prof. Dr. K., Universität Dortmund, Neubau Mathematik, 4600 Dortmund 50

Vogelsang, Dr. V., Institut für Mathematik der Universität Clausthal, Erzstr. 1, 3392 Clausthal-Zellerfeld 1

von Wahl, Prof. Dr. W., Mathematisches Insitut der Universität Bayreuth, Universitätsgelände, 8580 Bayreuth

Walter, Prof. Dr. J., Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Mathematik der RWTH Aachen, Templergraben 55, 5100 Aachen

Walter, Prof. Dr. W., Mathematisches Institut der Universität Karlsruhe, Englerstr. 7500 Karlsruhe

Weidmann, Prof. Dr. J., Institut für Angewandte Mathematik der Universität Frankfurt , Robert-Mayer-Str. 10, 6000 Frankfurt

Wendland, Prof. Dr. W., Fachbereich Mathematik der TH Darmstadt, Schloßgartenstr. 7, 6100 Darmstadt

Widmann, Prof. Dr. K.O., Matematiska Institutionen, Linköpings Högskola, Fack, S-58183 Linköping (Schweden)

Wiegner, Prof. Dr. M., Mathematisches Institut der Universität Bayreuth, Universitätsgelände, 8580 Bayreuth

Wienholtz, Prof. Dr. E., Mathematisches Institut der Universität München, Theresienstr. 39, 8000 München 2

Witsch, Dr. K.J., Institut für Angewandte Mathematik der
Universität Bonn, Wegelerstr. 6, 5300 Bonn

Wüst, Prof. Dr. R., Fachbereich Mathematik der TU Berlin,
Straße des 17. Juni 135, 1 Berlin

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft