MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 6/1980

Methoden und Verfahren der mathematischen Physik

3.2. bis 9.2.1980

Die nunmehr 9. Tagung über "Methoden und Verfahren der mathematischen Physik" fand unter der Leitung von B. Brosowski (Frankfurt) und E. Martensen (Karlsruhe) statt. Es kamen 41 Teilnehmer, darunter 11 aus dem Ausland. Das Ziel der Tagung war es, möglichst vielfältige Methoden der mathematischen Physik heranzuziehen und auf weitgefächerte, konkrete Fragestellungen anzuwenden. Außerdem sollte durch Beteiligung von Vertretern der Anwendungsgebiete selbst (hier der Mechanik und der Physik) die Zusammenarbeit und die gegenseitige Anregung gefördert werden.

Die insgesamt 33 Vorträge haben dieser Zielsetzung entsprochen. Im Vordergrund standen funktionalanalytische und numerische Methoden für partielle Differentialgleichungen und Integrodifferentialgleichungen. Zu den angesprochenen Gebieten gehörten u.a. die Strömungsdynamik, die Streutheorie, die spezielle Relativitätstheorie und die Ausbreitung von Wellen. Aufmerksamkeit wurde auch den Fragen der Modellbildung gewidmet. Einige Übersichtsvorträge ergänzten das Programm. Das Interesse an Fragestellungen aus den behandelten Anwendungsbereichen führte zu lebhaften Diskussionen und fruchtbarem wissenschaftlichen Austausch, nicht zuletzt auch mit den anwesenden Vertretern anderer Fachrichtungen.

Vortragsauszüge

H.-D. Alber

Rechtfertigung der geometrischen Optik bei nichtsternförmigen Hindernissen

Ludwig und Morawetz haben in einer Arbeit (Comm. Pure Appl. Math. 21, 1968, 187-203) bewiesen, daß die mit dem Ansatz der geometrischen Optik konstruierte Näherungslösung

$$u_1(x,k) = e^{ik\varphi(x)} \sum_{n=0}^{1} \frac{z_n(x)}{k^n}$$

gegen die exakte Lösung der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ konvergiert im Äußeren eines konvexen Hindernisses (für $k \to \infty$). Trotz vieler Versuche in der Zwischenzeit scheint man bisher noch zu keiner befriedigenden Lösung für nichtkonvexe Gebiete gelangt zu sein. Im Vortrag wird eine Methode beschrieben, mit der dieses Problem für eine große Klasse nichtsternförmiger Hindernisse gelöst werden kann. Als Voraussetzung wird im wesentlichen benötigt, daß kein Lichtstrahl "eingefangen" wird.

J. Baumeister

Zur Randsteuerung bei der Wärmeleitung

Wir betrachten das Kontrollsystem

$$(*) \quad \begin{cases} y_t = \Delta y + a * \Delta y & , \quad \text{in } \Omega\times(0,T) \\ y = 0 & , \quad \text{in } \Omega\times\{0\} \\ y = \omega & , \quad \text{in } \partial\Omega\times(0,T) \quad ; \end{cases}$$

dabei sei $T>0$, $\omega \in L_\infty(0,T;\ L_2(\partial\Omega))$ und $a*\Delta y(t) := \int_0^t a(t-s)\,\Delta y(s)ds$ ein Gedächtnisterm. Es wird ein Lösungsbegriff für die Aufgabe $(*)$ vorgestellt und die Frage der Kontrollierbarkeit untersucht. Für die Aufgabe, einen gegebenen Zustand zur Endzeit T unter Kontrolleinschränkungen optimal im L_2-Sinn anzusteuern, wird die Existenz- und Charakterisierungsfrage untersucht.

R. Colgen

Einige Anwendungen der Streutheorie unter Spurklassenbedingungen

Wir beschäftigen uns mit Spurklassenmethoden in der Streutheorie und Anwendungen in der Quantenmechanik. Zunächst wird ein einfacher Beweis Birman'scher Resultate skizziert. Dann wird gezeigt, daß aus diesen für Schrödinger- und

Diracoperatoren nicht nur Ergebnisse für den Fall folgen, daß für das Potential (im wesentlichen) $V(x) = O(|x|^{-3-\varepsilon}), \varepsilon > 0$, für $|x| \to \infty$ gilt. Man erhält die Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren, falls V zentralsymmetrisch ist und $V(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon}), \varepsilon > 0$, für $|x| \to \infty$ gilt; für Schrödingeroperatoren genügt es auch, daß V Rotationssymmetrie um eine Achse besitzt und $V(x) = O(|x|^{-2-\varepsilon}), \varepsilon > 0$, für $|x| \to \infty$ gilt. (Die Beweisidee der Separation in Polar- bzw. Zylinderkoordinaten geht auf Kuroda zurück.) Schließlich werden einige Folgerungen skizziert.

D. Colton

The Inverse Scattering Problem for Low Frequency Acoustic Waves

Suppose a plane acoustic wave is scattered by a bounded simply connected obstacle which can be either "hard" or "soft" and let the far field pattern be measured for all angles and low values of the frequency. Then the problem to be discusses is that of determining the shape of the obstacle D from these measurements. Through the use of conformal mapping methods ($D \subset \mathbb{R}^2$) and variational methods ($D \subset \mathbb{R}^3$) approximations to ∂D are obtained including error estimates.

Dan H. Constantinescu

Group action and the equilibrium of nonlinear systems

The problem considered is the equilibrium of a nonlinear system in presence of a symmetry. It is assumed that the symmetry group G is compact and that the set of equilibrium states is a smooth compact manifold M. Then, the smooth action of G on M yields a natural partition of M into (closed compact) orbits grouped into (a finite number of) strata. There exists a natural partial order on the set of conjugation classes of the corresponding (closed) isotropy groups of the equilibrium states. Using this structure, one can investigate the problem of spontaneous symmetry breaking (the existence of equilibrium states with isotropy groups strictly smaller than G), of basic importance for applications (in particular in field theory and solid state physics). If the order parameter describing the breaking has dimension less than four, the breaking is minimal, and it is conjectured that it continues to be minimal in any number of dimensions. The extension of these results to a noncompact G, if possible, is not trivial.

U. Elsaesser

Die numerische Lösung der stationären Navier-Stokes-Gleichungen mit dem Uzawaverfahren

Die bei der numerischen Lösung der stationären Navier-Stokes-Gleichungen auftretende Schwierigkeit, die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen, kann durch die Anwendung des Uzawaverfahrens umgangen werden (Fortin/Peyret/Temam 1971). Dabei entsteht eine Folge von nichtlinearen Dirichletproblemen, deren Lösungen die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen iterativ annähern. Es werden hinreichende Voraussetzungen für die globale Konvergenz dieses Verfahrens angegeben, die sich für die numerische Praxis auch explizit berechnen lassen und die den Bedingungen für die Eindeutigkeit der Lösung äquivalent sind.

M. Feistauer

The solution of rotational flows of an ideal incompressible fluid in multiply connected domains

The contribution is devoted to the mathematical investigation of two-dimensional stream fields of an ideal incompressible fluid round groups of profiles or cascades of profiles.

The problem is studied with the use of the stream function both in case of irrotational and rotational flow. The stream function is given up to an additive constant on every component of the boundary. If we know these constants, which are given by the flows between components of the boundary, then we can formulate a (nonlinear) boundary value problem for the stream function and to study its solvability with the use of monotone and pseudomonotone operators. However, the mentioned constants are usually not known in advance and it is necessary to determine them together with the stream function, in order to fulfil so called trailing conditions. In this case the solvability was proved on the basis of appropriate apriori estimates of solutions.

E. Halter

Eine a-priori-Abschätzung und ein gemischtes elektrisches Randwertproblem

Bei der Herleitung einer a-priori-Abschätzung für die inhomogene Wellengleichung im Außenraum mit Hilfe des Rothe-Verfahrens muß eine Spezialform eines Sobolev'schen Lemmas gezeigt werden. Eine Abschätzung in randnahen Bereichen wird mit Hilfe einer Darstellung der Lösung eines gemischten elektrischen Randwertproblems möglich.

E. Halter

Schwingungen einer rechteckigen Membran

Es wird ein computererzeugter Kurzfilm von etwa 15 Min. Dauer gezeigt, in dem zentralperspektivisch Schwingungen einer rechteckigen Membran unter Berücksichtigung der Unsichtbarkeit verdeckter Flächenteile projiziert werden. Der Film wurde in Zusammenarbeit mit dem Institut für den wissenschaftlichen Film IWF in Göttingen produziert.

E. B. Hansen

Integral Equation Solution of Electrochemical Machining Problems with rotational symmetry

Electrochemical machining is a technological process in which a metal work piece is machined by being placed as the anode in an electrolytic cell with a properly shaped cathode. The mathematical model, which is used most frequently to describe this process, is the so-called potential model in which the electrode surfaces are treated as equipotential surfaces and the electrolyte is assumed to be a homogeneous, imperfect conductor. So far the accuracy of this model has not been thoroughly investigated, but an extensive experimental material, which has recently been obtained, now makes such an investigation possible. In the report we describe an integral equation procedure for the solution of the mixed boundary value problem with rotational symmetry for the Laplace equation which is presently being developed with this application in mind.

P. Jochum

Zur numerischen Realisierung des Gauß-Newton-Verfahrens für das inverse Stefan-Problem

Aufgrund der Glattheit des Lösungsoperators des Stefan-Problems eignet sich das Gauß-Newton-Verfahren besonders gut zur numerischen Lösung des inversen Stefan-Problems. Die Hauptarbeit jedes Iterationsschrittes besteht dabei in der Konstruktion des Tangentialraumes. Die spezielle Gestalt der Frechet-Ableitung gestattet jedoch eine Variante des Gauß-Newton-Verfahrens, bei der der Tangentialraum im Laufe des Verfahrens nur einmal berechnet werden muß, ohne die guten Konvergenzeigenschaften zu verlieren. Die Effektivität wird an 2 gerechneten Beispielen demonstriert.

H. Kielhöfer

Verzweigung im einfachen Eigenwert und Stabilität von Verzweigungslösungen

Es sei

$$\text{(1)} \qquad \frac{du}{dt} + G(\lambda,u) = 0$$

eine Evolutionsgleichung in einem Banachraum E mit einem reellen Parameter λ. Der (i.a. unbeschränkte) Operator G hänge analytisch von λ und u ab und $v(\lambda)$ sei eine stationäre Lösung von (1). Für einen einfachen Eigenwert $\mu(\lambda)$ der Linearisierung $G_u(\lambda, v(\lambda))$ gelte

$$\operatorname{Re} \mu^{(j)}(\lambda_o) = 0 \quad , \quad j = 0,\dots,m-1 \quad , \quad \operatorname{Re} \mu^{(m)}(\lambda_o) \neq 0 \quad .$$

Dann folgt:

1) Ist m ungerade, so verzweigt aus $(\lambda_o, v(\lambda_o))$ mindestens eine stationäre (periodische) Lösung von (1), sofern $\operatorname{Im} \mu(\lambda_o) = 0$ ($\operatorname{Im} \mu(\lambda_o) \neq 0$) ist.

Ist m gerade, so ist Verzweigung möglich.

2) Es existieren höchstens m Verzweigungslösungen.

3) Es gilt das "Prinzip des Austausches der Stabilität": Benachbarte Zweige für festes λ haben nichtgleiches Stabilitätsverhalten.

4) Alle Zweige sind mit Hilfe des Newton-Diagrams konstruierbar.

5) Die Größen m und $\operatorname{Re} \mu^{(m)}(\lambda_o)$ müssen nicht a priori bekannt sein. Sie werden durch die Methode von Lyapunov-Schmidt gegeben.

Für $m = 1$ erhält man die Verzweigungssätze von Crandall-Rabinowitz und von E. Hopf.

R. Kreß

Ein singuläres Störungsproblem bei linearen Operatorgleichungen mit Anwendungen auf das Grenzverhalten von Lösungen von Randwertaufgaben

Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$), $K \subset \mathbb{C}$ und $0 \in K$ sei Häufungspunkt von K. Sei $\{K_\varkappa : X \to X \ , \ \varkappa \in K\}$ eine Familie kompakter linearer Operatoren. Für hinreichend kleine $\varkappa \neq 0$ sei $0 \leqq m := \dim N(I - K_\varkappa) < \dim N(I - K_o)$ und es gelte $\|K_\varkappa - K_o\| \to 0 \ , \varkappa \to 0$. Für die stetige Abhängigkeit der Lösungen von $\Phi_\varkappa - K_\varkappa \Phi_\varkappa = f_\varkappa$ vom Parameter $\varkappa$ an der Stelle $\varkappa = 0$ werden hinreichende Bedingungen angegeben. Das Ergebnis wird angewandt zur Untersuchung des Grenzverhaltens von Lösungen von Randwertaufgaben für die Helmholtzgleichung bei kleinen Frequenzen und für elektro- und magnetostatische gemischte Rand- und Übergangsprobleme bei kleinen Kopplungskoeffizienten.

A. Kufner

Application of weighted Sobolev spaces to degenerate and nondegenerate elliptic equations

For $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, one introduces the Sobolev weight space $W^{k,p}(\Omega, \sigma)$ $= \{u : \int_\Omega |D^\alpha u|^p \sigma_\alpha \, dx < \infty \quad \text{for} \quad |\alpha| \leqq k\}$, $\sigma = \{\sigma_\alpha, \ |\alpha| \leqq k\}$ being a family of weight functions. Then one investigates the existence of weak solutions $u \in W^{k,p}(\Omega, \sigma)$ of boundary value problems for linear elliptic partial differential equations.

Two types of problems are considered:

(i) σ is determined by the coefficients of the partial differential operator; this covers degenerate as well as nondegenerate elliptic equations.

(ii) σ is of the form $\sigma_\alpha(x) = s_\alpha(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))$ and one gives conditions on s_α which guarantee the existence of a weak solution for a nondegenerate elliptic equation.

H. Lange

Über einige nichtlineare Schrödinger-Gleichungen vom Hartree-Typ

Es werden einige nichtlineare Schrödinger-Gleichungen der Gestalt

$$(1) \qquad i\,\psi_t = \Delta\psi + \lambda v_q(\psi)^p \cdot \psi$$

betrachtet ($\lambda \in \mathbb{R}$, $p,q \geqq 1$), wobei $v_q(\psi)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(y,t)|^{2q}}{|y-x|} \, dy$ $= r^{-1} * |\psi|^{2q}$, $r = |x|$ ist. Es ist bekannt, daß (1) für $p = q = 1$ zwar global lösbar ist, aber keine L^2-Streutheorie besitzt. Wir zeigen, daß (1) für genügend großes p und q ($p > 2, 2q > \frac{7}{3} + \frac{1}{p-2}$) und kleine Anfangswerte eine globale H^2-Lösung des Cauchy-Problems und eine H^2-Streutheorie besitzt, d.h. zu gegebenem $\psi_0 \in H^2$ mit $\|\psi_0\|_{scat} \leqq \varepsilon_0$ (ε_0 genügend klein ; $\|\cdot\|_{scat}$ = "scattering"-Norm) existiert eine globale H^2-Lösung ψ von (1) und $\varphi_\pm \in H^2$ mit $\psi(\cdot, 0) = \psi_0$ und $\lim_{t \to \pm\infty} \|\psi(\cdot,t) - e^{itA}\varphi_\pm\|_{H^2} = 0$, $A = -\Delta$.

R. Leis

Anfangs-Randwertaufgaben zu den Thermoelastizitätsgleichungen

Es sollen Anfangs-Randwertaufgaben zu den Thermoelastizitätsgleichungen in unbeschränkten inhomogenen Medien behandelt werden. Dazu werden die Gleichungen formuliert und das Spektrum des auftretenden Differentialoperators diskutiert. Die Lösung der Aufgabe erhält man dann durch Laplace-Transformation.

P. Mulser

Brechen elektrostatischer Wellen bei Strömung

Elektrostatische Wellen hoher Amplitude bei Strömung können durch die Gleichung $\ddot{v} + \omega^2(t)v = e^{-i\omega_o t}$ für die normierte Oszillationsgeschwindigkeit behandelt werden, wenn das Problem auf Lagrange-Variable transformiert wird. Die Lösung dieser Gleichung mit zeitveränderlicher Eigenfrequenz $\omega(t)$ wird in Integraldarstellung angegeben und es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Einsetzen von Wellenbrechen aufgestellt.

P. Mulser

Wechselwirkung eines Hochleistungslasers mit einem Festkörper *)

Kraterbildung und Plasmaerzeugung in einer Folie aus festem Wasserstoff und deren Durchbrennverhalten im Laserstrahl werden in einem Einflüssigkeitsmodell mit Wärmeleitung in Rotationssymmetrie (zwei Ortskoordinaten) behandelt. Die hydrodynamischen Gleichungen werden mit dem makroskopischen particle in cell Code gelöst. Tests ergeben bis auf die Zellen an der Front gute Übereinstimmung mit dem Adiabatenverhalten. Die Rechenergebnisse des Durchbrennens der Folie werden in einem Film vorgeführt.

*) in Zusammenarbeit mit Dr. D. Lackner-Russo.

H. Neunzert

Ein altgewordenes Stiefkind der Mathematik, die Boltzmann-Gleichung

Der Stand der mathematischen Forschung zur Boltzmann-Gleichung wird skizziert in Hinblick auf folgende Fragestellungen:

1) Eine streng mathematische (stochastische) Herleitung der Boltzmann-Gleichung; dabei werden insbesondere die Arbeiten von Lanford (um 1975) diskutiert.

2) Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen; dabei wird insbesondere auf die Graditeration und ihre modernen Halbgruppen-theoretischen Varianten und auf die Carleman-Iteration mit der von Kaniel und Skinbrot vorgeschlagenen Verbesserung eingegangen.

In beiden Fragen ist die mathematische Forschung bisher über zeitlich lokale Aussagen nicht hinausgekommen. Die nach Auffassung des Vortragenden hoffnungsvollsten Ansätze zur Lösung der auftretenden Fragen werden erwähnt.

F. Nozicka

Die Räume gleichzeitiger und gleichentfernter Ereignisse in der speziellen Relativitätstheorie

Jedem Punkt einer regulären Weltlinie (Weltkurve) im Minkowski-Raum, die dem Beobachter eines allgemein nichtinertialen Systems entspricht, kann man eindeutig eine bestimmte dreidimensionale Mannigfaltigkeit zuordnen, welche die physikalische Bedeutung des Raumes gleichzeitiger Ereignisse in bezug auf den Beobachter in seinem festgewählten Zeitaugenblick hat. Diese Räume stellen dann entlang der fraglichen Weltkurve eine Zerlegung des Minkowski-Raumes dar, und die in ihnen induzierte Metrik ist eine Riemannsche Metrik. Mit der Schar der Räume gleichzeitiger Ereignisse ist eine Schar von Räumen gleichentfernter Ereignisse eng verbunden. Es wurden einige globale Eigenschaften der Räume beider Art angegeben und physikalisch interpretiert. Das aus der Theorie der Inertialsysteme bekannte Kausalitätsprinzip läßt sich dann auf nichtinertiale Systeme erweitern.

R. Picard

Potentialtheorie auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nicht-glattem Rand

Behandelt wird das Gleichungssystem der verallgemeinerten Potentialtheorie (ω Differentialform, d äußere Ableitung, δ Co-Ableitung)

$$d\omega = 0 \quad , \quad \delta\omega = 0$$

in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit G mit nicht notwendig glattem Rand ∂G unter Randbedingungen, die sich als Verallgemeinerung der Dirichletschen bzw. Neumannschen Randwertaufgabe

$\omega = 0$ auf ∂G bzw. $*\omega = 0$ auf ∂G ($*$ bezeichne den Hodge'schen Sternoperator) im Sinne der Hilbertraum-Methoden ergeben. Unter Voraussetzung einer globalen Segmenteigenschaft kann der Satz von Hodge über die Dimension des Lösungsraums auf den Fall nicht-glatter Berandung übertragen werden. Darüber hinaus werden Randwertaufgaben im beschränkten wie auch im Außenraumfall behandelt, die Elektro- und Magnetostatik als Spezialfälle enthalten. Notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingungen werden angegeben.

A. Piskorek

Existenz in der Thermoelastizitätstheorie

In diesem Vortrag betrachten wir die erste Anfangsrandwertaufgabe /ARWA I/ der Thermoelastizitätstheorie. Es handelt sich hierbei um ein gekoppeltes System der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie und einer parabolischen Differentialgleichung. Es wird gezeigt, daß die Lösung der ARWA I in Sobolevschen Räumen existiert.

V. A. Popov

Some estimation for numerical solution of equations of mathematical physics

There are given estimations of the error of numerical solution of the equation of diffusion (by means of finite differences homogeneous schemes, parabolic and cubic spline collocation) and of the heat-conduction equation (by means of two-layer schemes) in terms of the so called averaged local moduli of the solution u:

$$\tau_\chi(u;\delta)_{L_p} = \|\omega_\chi(u,x;\delta)\|_{L_p[a,b]} \quad ,$$

$$\omega_\chi(u,x;\delta) = \sup\{|\Delta_h^\chi u(t)|, t, t + \chi h \in [x - \tfrac{\chi\delta}{2}, x + \tfrac{\chi\delta}{2}] \cap [a,b]\} \quad .$$

The estimations are obtained without some additional restrictions over the solution (as the existence and boundedness of the higher derivatives of u). As consequences there are obtained some new results for example $O(h^2)$-convergence for the examined methods for the equation of diffusion if u''' has a bounded variation and $O(h)$-convergence if u'' has a bounded variation.

M. Renardy

Beschränkte Lösungen einer klassischen Yang-Mills-Gleichung

Es werden beschränkte Lösungen der in der Yang-Mills-Theorie auftretenden Differentialgleichung

$$r^2 \Delta u(r,t) = u^3(r,t) - u(r,t)$$

im Halbraum $r > 0$ untersucht. Wir zeigen, daß jede beschränkte C^2-Lösung, die sich bis auf abzählbar viele Ausnahmepunkte stetig auf die t-Achse fortsetzen läßt, dem Betrage nach überall kleiner als 1 ist, und außerdem, falls sie nicht konstant ist, beide Vorzeichen annimmt. Ferner werden alle beschränkten Lösungen, die nur von r oder nur von t/r abhängen, topologisch charakterisiert. Schließlich untersuchen wir Lösungen, die im Sinne einer geeigneten Norm "klein" sind, einerseits für in t periodische Lösungen, andererseits für eine gewisse Klasse nichtperiodischer Lösungen. In beiden Fällen ergibt sich eine eineindeutige Beziehung zwischen kleinen Lösungen und Eigenfunktionen der linearisierten Gleichung. Dies zeigt die Existenz unendlich-dimensionaler Mannigfaltigkeiten beschränkter Lösungen.

G. F. Roach

Constructive methods for problems depending on parameters

Many physically significant problems are described by means of equations depending on one or more parameters. Frequently, a variation of these parameters exercises an adverse influence on methods of constructing solutions to such problems. This is demonstrated by considering the layer theoretic approach to solutions of the exterior Neumann problem für the Helmholtz equation which requires that a boundary integral equation involving an operator depending on one parameter should be solved. Difficulties associated with certain characteristic values of the parameter can be removed by modifying the original kernel. Specifically, the kernel can be modified so as to remove a finite number of characteristic values of the original kernel. Furthermore, it is shown that such a modification can be made to yield an integral operator with a spectral radius less than that of the original operator.

J. Scheurle

Nichtperiodische Lösungen eines stationären Lorenz-Modells

Es wird ein mathematisches Modell betrachtet, welches die Strömung einer Flüssigkeit zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten beschreibt, wobei die Differenz der Temperaturen von der oberen und der unteren Platte einen konstanten Wert T hat. Für den Fall, wo die Strömung in Richtung der xy-Ebene (parallel zu den Platten) unabhängig von z ist, lauten die Grundgleichungen

$$(*) \qquad \begin{aligned} \nabla^4\psi + \lambda\frac{\partial\Theta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,y)} &= 0 \\ \nabla^2\Theta + \sigma\frac{\partial\psi}{\partial x} - \sigma\frac{\partial(\psi,\Theta)}{\partial(x,y)} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Hierbei ist ψ eine Stromfunktion der zweidimensionalen Strömung, θ ist die Abweichung der Temperatur gegenüber dem konvektionslosen Zustand, $\lambda \sim T$ ist die Grashoff-Zahl und σ die Prandtlzahl. Beschränkt man sich auf Lösungen, welche in x-Richtung periodisch sind, so erhält man aus (*) ein Lorenz-Modell, indem man die Fourier-Entwicklungen bzgl. x nach endlich vielen Termen abbricht. Es zeigt sich, daß ein solches Modell für $\alpha^4 < \sigma\lambda < 16\alpha^4$ in der Nähe von $\psi = 0$, $\theta = 0$ ein ganzes Kontinuum an doppelperiodischen Lösungen besitzt. Außer diesen gibt es keine weitere Lösung, die beschränkt und "klein" ist. Für $\sigma\lambda > 16\alpha^4$ findet man dagegen Lösungen, welche in y-Richtung quasiperiodisch sind und zwei unabhängige Frequenzen besitzen. Außerdem wird die Existenz von Lösungen diskutiert, welche sich als Grenzwert einer Folge von doppelperiodischen Lösungen mit beliebig großen Perioden in y-Richtung ergeben.

H. Sohr

Eine a-priori-Abschätzung für die Gleichung von Stokes

Es wird gezeigt, daß sich die Gleichung von Stokes (stationäre linearisierte Navier-Stokes-Gleichungen) mit einer störungstheoretischen Methode behandeln läßt, die auch nicht glatte Grundgebiete zuläßt. Zum Schluß werden weitere Anwendungen (u.a. auf Evolutionsgleichungen) betrachtet.

G. Szefer

Methoden der konvexen Analysis in Randwertaufgaben der Kontinuumsmechanik

In den letzten Jahren hat sich im Rahmen der Kontinuumsmechanik eine neue Theorie entwickelt, die die deformierbaren Körper mit den sogenannten inneren Bindungen betrifft. Probleme dieser Art können mit Mitteln der konvexen Analysis erfolgreich behandelt werden. In der Arbeit zeigen wir, daß die Anwendungen von Grundbegriffen der konvexen Analysis wie: maximale monotone Operatoren, Subdifferentiale, Indikatoren usw. zu Variations-Formulierungen führen, die die bisherigen Ergebnisse wesentlich verbreitern und verallgemeinern. Bindungen verschiedener Art wie: ein- und zweiseitige, materielle und programmierbare, holonome und anholonome, innere und äußere, sind in Einzelheiten diskutiert. Es werden sogar Grundlagen wie auch einige Anwendungen gezeigt. Variationelle Formulierung der Randwertaufgaben, wie auch zugeordnete Variationsungleichungen bilden die Endergebnisse der Theorie.

F. Ursell

Uniform asymptotic expansions for the double integral

$\iint g(x,y)\exp\{iN(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \alpha x + \beta y + \gamma xy)\}\,dx\,dy$

The method of steepest descents is a familiar method of finding the asymptotic expansion of contour integrals of the form

$$\int g(z)\exp(Nf(z))dz$$

where $g(z)$ and $f(z)$ are analytic functions, and where $N \to +\infty$. The principal contributions usually come from the saddle points where $df/dz = 0$. Difficulties arise when $f(z)$ involves parameters; the saddle points then depend on the parameters and may coincide at certain critical values. The asymptotic expansions are then non-uniform but it is well known that uniform expansions can be found. Much less is known about double integrals. Recent work will be described on double integrals of the form

$$\iint g(x,y)\exp\{iN(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \alpha x + \beta y + \gamma xy)\}\,dx\,dy ,$$

which have 4 nearly coincident saddle points when α, β and γ are small.

Z. Vlasek

An automatic generation of the conformal coordinate system in any curvilinear quadrangle

Well positioned mesh points are needed whenever a partial differential equation is solved numericaly. For a special case, plane curvilinear quadrangle Q with four $\pi/2$ - corners, the conformal mapping method was applied succesfully.

One-to-one and corner-to-corner corespondence between Q and a rectangle $[0, 1] \times [0,h]$, h is not given, enables computer to produce any set of internal or boundary mesh points, if we have such set in the rectangle.

In every iteration a method of approximative solution of the boundary integral equation with continous corn is used.

The algorithm was applied for data preparation by the finite differences method of the solution of the flow through very curved turbine channals.

W. L. Wendland

Randwertprobleme, Integralgleichungen auf dem Rand, finite Elemente

Die Integralgleichungsmethoden für innere oder äußere Randwertaufgaben werden in immer stärkerem Maße auch zu numerischen Lösungsverfahren ausgebaut. Hier wird eine Klasse solcher Verfahren entwickelt. Bei einer Vielzahl von Beispielen definieren die Randintegralgleichungen stark elliptische Pseudodifferentialoperatoren mit Faltungsoperatoren als Hauptteil. Verwendet man Galerkin-Verfahren, so sichert die starke Elliptizität optimale Konvergenz in einer "Energienorm". Nutzt man die a-priori Abschätzungen für elliptische Pseudodifferentialoperatoren aus, so bekommt man sogar Superkonvergenz. Mit regulären finiten Elementen als Ansatzfunktionen kann der Hauptteil der Galerkin-Gleichungen durch zwei Töplitz-Matrizen beschrieben werden, die weder von der Randmannigfaltigkeit noch der Maschenweite abhängen. Für die glatten Restoperatoren wählt man geeignete numerische Integrationsformeln. Die resultierenden Galerkin-Kollokations-Verfahren konvergieren von optimaler Ordnung und lassen sich leicht programmieren. Numerische Ergebnisse für die Symmsche und verwandte Integralgleichungen bestätigen dies. Eine Darstellung dieser Ergebnisse erscheint demnächst in der ISNM-Reihe.

J. Wick

Zum Eindeutigkeitsproblem bei Erhaltungsgleichungen

Die von Foiaş für die Navier-Stokes-Gleichungen und von Arsenev für die Vlasov-Gleichung eingeführten statistischen Lösungen sollten klären helfen, wie sich die für diese Gleichungen bekannten lokal existierenden und eindeutigen klassischen Lösungen in die global bekannten schwachen Lösungen fortsetzen. Außer der Existenz statistischer Lösungen ist jedoch nichts weiter bekannt. Deshalb wird das Konzept statistischer Lösungen auf $\dot{x} = f(x)$ übertragen und untersucht, wie sich Nichteindeutigkeiten in der statistischen Lösung auswirken. Es zeigt sich, daß man die Nichteindeutigkeit voll auf die statistische Lösung überträgt.

C. H. Wilcox

Die Heisenberg Matrix und die Struktur des Sonar Echos

A pulse-mode sonar transmitter, located near $0 \in \mathbb{R}^3$, emits a sound pulse

$$(1) \qquad U_o(t,x) = \frac{s(|x|-t,\theta)}{|x|} + \sigma \;, \qquad x = |x|\theta$$

where $\sigma \to 0$ when $t \to \infty$. The choice of the signal waveform $s(T,\theta)$ is made by the sonar designer. The pulse U_o is scattered by an object Γ located near $x_o \in \mathbb{R}^3$. The error σ in (1) is small near Γ if $|x_o| \gg 1$; i.e., $\sigma = \sigma_{|x_o|} \to 0$ when $|x_o| \to \infty$. The sonar echo due to Γ has the form

(2) $$U(t,x) = \frac{e(|x-x_o| - t,\theta)}{|x - x_o|} + \sigma_{|x_o|} + \sigma_{t-|x_o|}$$

where $\sigma_{t-|x_o|} \to 0$ when $t - |x_o| \to \infty$ and $\sigma_{|x_o|} \to 0$ when $|x_o| \to \infty$, uniformly in t. The Fourier transforms of $s(\tau,\theta)$ and $e(\tau,\theta)$ with respect to τ are shown to be related by

$$\hat{e}(\omega,\theta) = e^{i\omega x_o \cdot \theta} \int_{|\theta'|=1} T(\omega\theta,\omega\theta')\hat{s}(\omega,\theta')d\theta'$$

where $T(p,p')$ is the scattering kernel of Γ; i.e.,

$$\delta(p-p') + T(p,p')$$

is the kernel of the Heisenberg "matrix" of Γ.

Berichterstatter: E. Halter

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Liste der Teilnehmer an der Tagung

"Methoden und Verfahren der mathematischen Physik"

in Oberwolfach vom 3.2. bis 9.2.1980

Dr. H. D. Alber	Institut für Angewandte Mathematik der Universität, Wegelerstr. 10, 5300 Bonn
Prof. Dr. J. Baumeister	Fachbereich Mathematik der Universität, Robert-Mayer-Str. 10, 6000 Frankfurt a.M.
Prof. Dr. B. Brosowski	Fachbereich Mathematik der Universität, Robert-Mayer-Str. 10, 6000 Frankfurt a.M.
Dr. R. Colgen	Fachbereich Mathematik der Universität, Robert-Mayer-Str. 10, 6000 Frankfurt a.M.
Prof. Dr. D. Colton	Dept. of Mathematics, University of Delaware, Newark, Delaware, USA
Dr. D. H. Constantinescu	Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, 8046 Garching
Dr. U. Elsaesser	Institut für Praktische Mathematik der Universität, Englerstr. 2, 7500 Karlsruhe
Dr. M. Feistauer, CSc.	Institut für Mathematische Physik, Mathematisch-Physikalische Fakultät der Universität, Malostranské nám. 25, 11000 Praha-Malá Strana, ČSSR
Dr. E. Halter	Mathematisches Institut II der Universität, Englerstr. 2, 7500 Karlsruhe
Prof. Dr. E. B. Hansen	Laboratory of Applied Mathematical Physics, The Technical University of Denmark, Building 303B, 2800 Lyngby, Dänemark
Doz. Dr. P. Hermann	Institut für Reine und Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule, Templergraben 55, 5100 Aachen
Dipl.-Math. M. Jirmann	Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule, Schloßgartenstr. 7, 6100 Darmstadt

Dr. P. Jochum	Mathematisches Institut der Universität, Theresienstr. 39, 8000 München 2
Prof. Dr. H. Kielhöfer	Institut für Angewandte Mathematik und Statistik der Universität, Am Hubland, 8700 Würzburg
Prof. Dr. K. Kirchgässner	Mathematisches Institut A der Universität, Pfaffenwaldring 57, 7000 Stuttgart 80
Prof. Dr. R. Kreß	Lehrstühle für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität, Lotzestr. 16-18, 3400 Göttingen
Doz. Dr. A. Kufner, CSc.	Mathematisches Institut der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften, Žitná Ulice 25, Praha 1 ČSSR
Prof. Dr. H. Lange	Mathematisches Institut der Universität, Weyertal 86-90, 5000 Köln 41
Prof. Dr. R. Leis	Institut für Angewandte Mathematik der Universität, Wegelerstr. 10, 5300 Bonn
Prof. Dr. E. Martensen	Mathematisches Institut II der Universität, Englerstr. 2, 7500 Karlsruhe 1
Prof. Dr. E. Meister	Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule, Schloßgartenstr. 7, 6100 Darmstadt
Dr. P. Mulser	Projektgruppe für Laserforschung in der Max-Planck-Gesellschaft, 8046 Garching
Prof. Dr. H. Neunzert	Fachbereich Mathematik der Universität, Pfaffenbergstr. 95, 6750 Kaiserslautern
Prof. Dr. F. Nožička	Lehrstuhl für Numerische Mathematik, Mathematisch-Physikalische Fakultät der Universität, Malostranské nám. 25, 11000 Praha-Malá Strana, ČSSR
Dr. R. Picard	Institut für Angewandte Mathematik der Universität, Wegelerstr. 10, 5300 Bonn
Prof. Dr. A. Piskorek	Lehrstuhl für Mathematik und Mechanik der Universität, Palac Kultury i Nauki IX p. 937, 00-901 Warszawa, Polen
Prof. Dr. J. Polášek, Dr.Sc.	Mathematisches Institut der Technischen Universität, Suchbátarova 4, 16607 Praha 6, ČSSR

Prof. Dr. V. A. Popov	Institute of Mathematics and Mechanics, P. O. Box 373, 1000 Sofia, Bulgarien
Dipl.-Math. R. Quetting	Mathematisches Institut II der Universität, Englerstr. 2, 7500 Karlsruhe 1
Dipl.-Math. M. Renardy	Institut für Theoretische Physik der Universität, Pfaffenwaldring 57, 7000 Stuttgart 80
Prof. Dr. G. F. Roach	Dept. of Mathematics, University of Strathclyde, Livingstone Tower, 26 Richmond Street, Glasgow G1 1XH, Schottland
Dr. J. Scheurle	Mathematisches Institut A der Universität, Pfaffenwaldring 57, 7000 Stuttgart 80
Dipl.-Math. K. Schnatz	Fachbereich Mathematik der Universität, Robert-Mayer-Str. 10, 6000 Frankfurt a.M.
Prof. Dr. H. Sohr	Fachbereich Mathematik der Gesamthochschule, Warburgerstr. 100, 4790 Paderborn
Prof. Dr. G. Szefer	Institut für Baumechanik der Technischen Hochschule, Krakau, Polen
Prof. Dr. F. Ursell	Dept. of Mathematics, Victoria University, Manchester M13 9PL, England
Dr. Z. Vlášek, CSc.	Institut für Mathematische Physik, Mathematisch-Physikalische Fakultät der Universität, Malostranské nám. 25, 11000 Praha-Malá Strana, ČSSR
Prof. Dr. W. Wendland	Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule, Schloßgartenstr. 7, 6100 Darmstadt
Prof. Dr. P. Werner	Mathematisches Institut A der Universität, Pfaffenwaldring 57, 7000 Stuttgart 80
Prof. Dr. J. Wick	Fachbereich Mathematik der Universität, Pfaffenbergstr. 95, 6750 Kaiserslautern
Prof. Dr. C. H. Wilcox	Institut für Angewandte Mathematik der Universität, Wegelerstr. 10, 5300 Bonn