MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 15/1980

Arbeitstagung über "QUILLENs K-Theorie"

7.4. bis 12.4.1980

Das Ziel dieser Tagung war die Einarbeitung in die Quillensche K-Theorie anhand geeigneter Texte (Zusammenstellung dieser Texte und Leitung der Tagung: F. Waldhausen, Bielefeld).

Der erste Text [= Q] [D. Quillen: "Lectures on Algebraic Topology, M.I.T. (1973/74/75) Notes by Howard Hiller] ist Teil einer Vorlesungsmitschrift. Darin wird die K-Theorie von Ringen definiert über die sogenannte "+ Konstruktion". Dieser Zugang zur K-Theorie wird bis zu einer natürlichen Transformation von gewissen Funktoren entwickelt (vgl. 7. Vortrag), die es gestattet, Abbildungen der K-Theorie zu konstruieren allein mit Hilfe der Manipulation von Darstellungsringen. Dieser Trick wurde an internen Operationen in der K-Theorie illustriert (vgl. 8. Vortrag).

Der zweite Text [D. Quillen: Higher Algebraic K-Theorie: I, Springer Lecture Notes 341 (1973), 85-147] [= Q-I] behandelt die K-Theorie von "Kategorien mit exakten Folgen". Vgl. Vorträge 9-11, in denen die "Q-Konstruktion" studiert wurde.

Der dritte Text (=[Q-II]) [D. Grayson: Higher Algebraic K-Theorie: II, Springer Lecture Notes 551 (1976) 217-240] schließlich ist die Fortsetzung von Q-I. Es wurde dieser Arbeit in den letzten 3 Vorträgen der Beweis dafür entnommen, daß die Q-Konstruktion, angewendet auf die Kategorie der endlich erzeugten projektiven Moduln über einem Ring, dasselbe liefert wie die + Konstruktion.

Vortragsauszüge

TH. BRÖCKER:

Einführung in die Homotopietheorie

Es wurden einige grundlegende Sätze der Homotopietheorie als Hilfsmittel für die nachfolgenden Vorträge erklärt.

E. VOGT:

Azyklische Abbildungen

Es wurden Charakterisierungen azyklischer Abbildungen gegeben und die Vererblichkeit azyklischer Abbildungen bei Pull-backs von Faserungen und Push-outs von Kofaserungen nachgewiesen (Q. Seite 1-7).

R. VOGT:

+ Konstruktion und Dror-Turm

Im Vortrag wurden zunächst die azyklischen Abbildungen mit fester Quelle klassifiziert, und als wichtiger Spezialfall die + Konstruktion behandelt. Der Dror-Raum AX wurde als Faser der + Konstruktion eingeführt und seine universelle Eigenschaft bewiesen. Es wurde gezeigt, daß AX auch mit Hilfe einer Art Postnikov-Turm konstruiert werden kann (Q. S. 7-13).

N. KLINGEN:

Quillens K-Funktoren für Ringe

Es wurde berichtet über die niederen K-Funktoren K_0, K_1, K_2 und gezeigt, daß K_1 und K_2 sich beschreiben lassen als Homotopiegruppen $\pi_i\,(BGL(A)^+)$ $(i = 1,2)$. Dies geschieht über die Dror-Konstruktion der Homotopiefaser von $BGL(A) \to BGL(A)^+$ als $\varprojlim X_n$, deren erste Terme $X_1 = BGL(A)$ und $X_2 = BE(A)$ sind. Indem man X_3 als klassifizierenden Raum der Steinberg-Gruppe St(A) nachweist, ergibt sich $K_3(A) = H_3(St(A), Z)$ (Q. S.13-21).

G. FREY:

H-Raum - Struktur von $BGL(A)^+$

Durch Einführung eines geeigneten Homomorphismus von $GL(A) \times GL(A)$ in GL(A) erhält man eine davon induzierte Abbildung $+ : BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \to BGL(A)^+$, von der gezeigt wird, daß sie $BGL(A)^+$ zu einem zusammenhängenden kommutativen und assoziativen H-Raum mit 1 (bis auf Homotopie) macht. Wendet man Ergebnisse von Milnor-Moore bzgl. solcher Räume und Berechnungen der stabilen reellen Homologie arithmetischer Gruppen nach Borel an, so erhält man für den Fall, daß A der Ganzheitsring eines Zahlkörpers ist, eine vollständige Bestimmung von $\dim_{\mathbb{Q}}(K_i(A) \otimes \mathbb{Q})$ (Q. S.27-33).

R. WIEGMANN:

Homologie der Matrizengruppen $\begin{pmatrix} GL_r(A) & * \\ 0 & GL_\infty(A) \end{pmatrix}$

Bei diesem Vortrag wurde gezeigt, daß die kanonische Inklusion

$$\begin{pmatrix} GL_r(A) & 0 \\ 0 & GL_n(A) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} GL_r(A) & M_{rn}(A) \\ 0 & GL_n(A) \end{pmatrix}$$

im Limes $n \to \infty$ einen Isomorphismus

$$H_* \begin{pmatrix} GL_r(A) & 0 \\ 0 & GL_\infty(A) \end{pmatrix} = H_* \begin{pmatrix} GL_r(A) & * \\ 0 & GL_\infty(A) \end{pmatrix}$$

induziert. Elementare Anwendungen hiervon sind:

1.) Behandlung des Swan-Gegenbeispiels

2.) $H_*(GL(F_q) ; Z_p) = 0, \; * > 0$

(Q. S.34-43).

Im übrigen ist dieser Satz das grundlegende Faktum hinter der Äquivalenz zweier Definitionen der K-Gruppen von A.

H. HAUSCHILD:

Eine natürliche Transformation α: $R(G,A) \to [BG, BGL(A)^+]_o$.

Es wurde eine natürliche Transformation α vom Darstellungsring $\tilde{R}(G,A)$ von G auf projektiven A-Moduln in die Gruppe K(BG,A) konstruiert. Für den endlichen CW-Komplex X ergibt sich hieraus eine natürliche Transformation

$$\beta: \tilde{R}(\pi_1(X); M) \to K(X,A) = [X | BGL(A^+)]_o,$$

mit einer nützlichen universellen Eigenschaft (Q.S.43-53).

E. OSSA:

Die λ-Ring-Struktur

Nach einer Betrachtung der Funktorialität wurden externe und - im kommutativen Fall - interne Produkte für K(X,A) eingeführt. Als nächstes wurde gezeigt, daß K(X,A) ein spezieller λ-Ring ist, wobei als wesentliche Zutat die entsprechende Behauptung für die ganzzahligen Darstellungen der GL(n,Z) herangezogen wurde. Die damit zur Verfügung stehenden Eigenschaften der Adams-Operationen ψ^K: $K(X,A) \to K(X,A)$ führten, zusammen mit der Tatsache, daß in Charakteristik p der Frobenius gerade ψ^p ist, zu der folgenden Anwendung: Ist A kommutativer perfekter Ring der Charakteristik p, so ist für $n > 1$ die Multiplikation mit p ein Isomorphismus auf $K_n(A)$ (Q.S. 53-55).

P. SCHNEIDER:

Der klassifizierende Raum einer kleinen Kategorie

Es wurde der klassifizierende Raum einer kleinen Kategorie definiert; diese Konstruktion ist funktoriell und mit Produkten vertauschbar; eine natürliche Transformation von Funktoren zwischen kleinen Kategorien induziert eine Homotopie zwischen den induzierten Abbildungen der klassifizierenden Räume. Dann wird für einen Funktor die kategorientheoretische "Faser" eingeführt und in Beziehung zur Homotopiefaser der zugehörigen Abbildung klassifizierender Räume gesetzt. Insbesondere ergibt sich ein fundamentales Kriterium für die Existenz einer langen Homotopiesequenz. (Q.I § (1)). * Siehe Anmerkung S.7

H. DELFS:

Es wurden die K-Gruppen einer additiven Kategorie $\mathfrak{M}$ mit exakten Folgen eingeführt, die sog. Q-Konstruktion. $\mathfrak{M}$ wird die Kategorie $Q\mathfrak{M}$ zugeordnet, deren Objekte die von $\mathfrak{M}$ und deren Morphismen Isomorphieklassen von Diagrammen $M \overset{p}{\twoheadleftarrow} N \overset{i}{\rightarrowtail} M'$ mit sog. zulässigen Morphismen i,p aus $\mathfrak{M}$ sind. Es erweist sich, daß die Fundamentalgruppe $\pi_1(Q\mathfrak{M},0)$ kanonisch isomorph zur Grothendieck-Gruppe $K_0\mathfrak{M}$ ist. Ist A ein Ring und P(A) die Kategorie der endlich erzeugten projektiven A-Moduln, so setzt man $K_i(A) = K_i(P(A))$. Ist X ein Schema und P(X) die Kategorie der endlich erzeugten lokal-freien Vektorbündel, so definiert man $K_i(X) = K_i(P(X))$ (Q I § 2).

M. KNEBUSCH:

Sei $\mathcal{E}$ die additive Kategorie der kurz exakten Sequenzen in einer exakten Kategorie $\mathfrak{M}$. Man hat 3 Funktoren $\mathcal{E} \to \mathfrak{M}$: Subobjekt s, Totalobjekt t und Quotientobjekt q. Mit deren Hilfe macht man $\mathcal{E}$ zu einer exakten Kategorie.

Additivitätssatz: (s,q): $Q\mathfrak{E} \to Q\mathfrak{M} \times Q\mathfrak{M}$ ist eine Homotopieäquivalenz.

Daraus folgt:

Cor: Seien $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}$ exakte Kategorien und $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$. Kurz exakte Sequenz von exakten Funktoren $\mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}$. Dann ist $F_* = F_*' + F''_* : K_i\mathfrak{M}' \to K_i\mathfrak{M}$.

Sei $\mathfrak{M}$ exakte Kategorie mit einer Menge von Isomorphieklassen und $\mathfrak{P}$ eine Unterkategorie mit:

a) $\mathfrak{P}$ enthält ein 0-Objekt

b) Sind in $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$
   M' und M'' isomorph zu Objekten in $\mathfrak{P}$, so auch M.

Auflösungssatz: Sei $\mathfrak{P}$ volle Unterkategorie von $\mathfrak{M}$ mit a), b) und gilt:

i) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakt, $M \in \mathfrak{P} \Rightarrow M' \in \mathfrak{P}$

ii) Für jedes $M'' \in \mathfrak{M}$ ex $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ mit $M \in \mathfrak{P}$

Dann: $Q\mathfrak{P} \to Q\mathfrak{M}$ Homotopieäquivalenz.

Der Satz wird auf Auflösungen beliebiger Länge verallgemeinert.

Q I § 3-7 (Teil)

G. TAMME:

Devissage- und Lokalisierungstheorem.

Diese lauten:

(a) Sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{L}$ eine nicht-leere volle Unterkategorie von $\mathfrak{A}$, die abgeschlossen ist gegenüber der Bildung von Unterobjekten, Quotienten und endlichen Produkten. Jedes Objekt M von $\mathfrak{A}$ besitze eine endliche Filtrierung durch Unterobjekte, deren Faktoren zu $\mathcal{L}$ gehören. Dann ist $Q\mathcal{L} \to Q\mathfrak{A}$ eine Homotopieäquivalenz.

(b) Sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche Kategorie, $\mathcal{L}$ eine Serre'sche Unterkategorie; seien $\mathcal{L} \xrightarrow{e} \mathfrak{A} \xrightarrow{t} \mathfrak{A}/\mathcal{L}$ die kanonischen Funktoren. Dann ist $Q\mathcal{L} \to Q\mathfrak{A} \to Q(\mathfrak{A}/\mathcal{L})$ eine Faserung im homotopietheoretischen Sinn, mit anderen Worten, man hat eine lange exakte Folge von Homotopiegruppen:

$$\to K_i(\mathcal{L}) \xrightarrow{e_*} K_i(\mathfrak{A}) \xrightarrow{t_*} K_i(\mathfrak{A}/\mathcal{L}) \xrightarrow{\delta} K_{i-1}(\mathcal{L}) \to$$

Die hieraus resultierenden exakten Sequenzen für die Situation: X noeth. Schema; $\mathfrak{M}$ Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln, Filtrierung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 > \ldots > \mathfrak{M}_p > \ldots$ mit $\mathfrak{M}_p = \{F \in \mathfrak{M} \mid \operatorname{codim}(\operatorname{supp}(F), x) \geq p\}$ werden diskutiert.

(Q I §3-7 (Teil)).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

R. SCHWÄNZL:

<u>Monoidale Kategorien und Lokalisierung</u>

Es wird die Lokalisierung einer kleinen Kategorie X nach einer Operation einer kommutativen monoidalen Kategorie S definiert. Es wird gezeigt: Die kanonische Abbildung $X \to S^{-1}X$ ist eine Homotopieäquivalenz genau dann, wenn die Operation von S auf X invertibel ist. Hierbei sind einige technische Voraussetzungen notwendig: Morphismen in S sind Isomorphismen, alle Translationen treu. Der Beweis ist eine Folgerung aus dem Cor. zu Thm. B (QI) (Q II S. 218-220).

U. STUHLER:

<u>Beziehung zwischen + Konstruktion und Lokalisierungskonstruktion</u>

Es wird gezeigt:

<u>Satz:</u> X eine S-Kategorie, dann:

$$(\pi_0 S)^{-1} H_*(X) \to H_*(S^{-1}X) \text{ isomorph.}$$

Dazu konstruiert man zu der Abbildung $S^{-1}X \xrightarrow{p} \langle S,S\rangle$ eine Spektralsequenz:

$$E^2_{pq} = H_p(\langle S,S\rangle, \overline{H_q(X)}) \Rightarrow H_{p+q}(S^{-1}X).$$

Der Funktor $\overline{H_q(X)}$ ist jedoch kein lokales Koeffizientensystem. Da Lokalisieren exakt ist, kann man jedoch die Spektralsequenz lokalisieren und erhält:

$$E^2_{pq} = H_p(\langle S,S\rangle, \overline{(\pi_0 S)^{-1} H_q(X)}) \Rightarrow H_{p+q}(S^{-1}X)$$

Der Funktor $\overline{(\pi_0 S)^{-1} H_q(X)}$ ist ein lokales Koeffizientensystem.

Sei $S = \mathrm{Iso}(P)$, P die Kategorie der endlich erzeugten projektiven Moduln über einem Ring R. Man hat eine Abbildung: $BGl(R) \to |S^{-1}S_0|$.

Mit dem vorangehenden Satz kann man $H_* S^{-1}S$ berechnen. Man erhält $BGl(R) \to |S^{-1}S_0|$ azyklisch. Daraus entnimmt man:

Thm: $|S^{-1}S| \simeq K_0 R \times BGl(R)^+$.

Q II S. 221-224.

T. TOM DIECK:

<u>Beziehung zwischen Q-Konstruktion und Lokalisierungskonstruktion</u>

S und P wie in 14. In Analogie zur Milnorkonstruktion wird eine Kategorie E konstruiert auf der S "frei" operiert. Man hat dann eine Projektion nach QP mit trivialer insbesondere invertibler S-Aktion. Nach Lokalisierung zeigt man:

<u>Satz:</u>

$$\begin{tikzcd} S^{-1}S \arrow[r] \arrow[d] & S^{-1}E \arrow[d] \\ * \arrow[r] & QP \end{tikzcd}$$

ist homotopiecartesisch.

<u>Satz:</u> $S^{-1}E$ ist zusammenziehbar.

Folgerung: $K_0R \times BGl(R)^+ \simeq |S^{-1}S| \simeq \Omega|QP|$.

(Q II 226-228).

*) Anmerkung d. Ber.: Hinter dem fundamentalen Kriterium von 9.) verbergen sich die Theoreme A und B.
Diese beiden Sätze erweisen sich als Schlüsselworte in der K-Theorie, sobald man diese über die Q-Konstruktion definiert.(10.), 11.), 12.)).

Schließlich helfen sie, die Beziehung zwischen + -Konstruktion und Q-Konstruktion zu klären ((13.), 15.)).

R. Schwänzl, Osnabrück

Liste der Tagungsteilnehmer

Herrn
Dr. G. Angermüller
Fachbereich Mathematik
und Physik
Universitätsstr. 40

8520 Erlangen

Herrn
Prof. Dr. A. Bak
Fakultät für Mathematik
Universitätsstr.

48 Bielefeld

Herrn
Dr. Pilar Bayer
Fachbereich Mathematik
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Herrn
Dr. Eberhard Becker
Universität Dortmund
Abteilung Mathematik
Postfach 500 500

4600 Dortmund 50

Herrn
Prof. Dr. R. Berndt
Fachbereich Mathematik
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Herrn
Prof. Dr. L. Bröcker
Mathematisches Institut
Roxeler Str. 64

4400 Münster

Herrn
Prof. Dr. Th. Bröcker
Fachbereich Mathematik
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Herrn
Dr. Hans Delfs
Fachbereich Mathematik
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Herrn
oProf. Dr. T. tom Dieck
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Am Wilhelmsplatz 2

3400 Göttingen

Herrn
Priv.-Doz. Dr. P. Draxl
Fakultät für Mathematik
Universitätsstr.
4800 Bielefeld

Herrn
Dr. Gerd Faltings
Mathematisches Institut
Roxeler Str. 64

4400 Münster

Herrn
Prof. Dr. E. Freitag
Fakultät f. Mathematik
Im Neuenheimer Feld 288

6900 Heidelberg

Herrn
Prof. Dr. G. Frey
Fachbereich Mathematik
Bau 27

6600 Saarbrücken

Herrn
Priv.-Doz. Dr.
Jürgen Hurrelbrink
Fakultät für Mathematik
Universitätsstr.

4800 Bielefeld

Herrn
Prof. Dr. Halter-Hoch
Fachbereich 6 Mathematik
Universitätsstr. 2

4300 Essen

Herrn
Priv.-Doz. Dr.
K. Johannson
Fakultät für Mathematik
Universitätsstr.

4800 Bielefeld

Herrn
Dr. H. Hauschild
Mathematisch-Wissenschaftliche Fakultät
Am Wilhelmsplatz 2

3400 Göttingen

Herrn
Dr. Ernst Kani
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 288

6900 Heidelberg

Herrn
Dr. Friedrich Hegenbarth
Abteilung Mathematik
Postfach 500 500

4600 Dortmund

Frau
Dr. Ina Kersten
Fachbereich Mathematik
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Herrn
Prof. Dr. W. Helling
Fakultät für Mathematik
Universitätsstr.

4800 Bielefeld

Herrn
Prof. Dr. R. Kiehl
Fakultät f. Mathematik u. Informatik
Seminargebäude A5

6800 Mannheim

Herrn
Dr. Johannes Huebschmann
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 288

6900 Heidelberg

Herrn
Priv.-Doz. Dr. N.Klingen
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Albert-Magnus-Platz

5000 Köln 41

Herrn
oProf. Dr. M. Knebusch
Fachbereich Mathematik
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Herrn
oProf. Dr. E. Ossa
Fachbereich 7 Mathematik
Gesamthochschule
Gaußstr. 20

5600 Wuppertal

Herrn
Dr. K. Köhnen
Fachbereich Mathematik
Saarstr. 21

6500 Mainz

Herrn
Prof. Dr. H. Scheerer
Frei Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
FB 19
Arnimallee 2-6

1 Berlin 33

Herrn
Dr. Wiss.Rat H. Lange
Fachbereich Mathematik
und Physik
Universitätsstr. 40

8520 Erlangen

Herrn
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Fachbereich Mathematik
Bau 27

6600 Saarbrücken

Herrn
Dr. Peter Löffler
Mathematisch-Wissenschaft-
liche Fakultät
Am Wilhelmsplatz 2

3400 Göttingen

Herrn
Dr. Hans Peter Schneider
Fachbereich Mathematik
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Herrn
Prof. Dr. Falko Lorenz
Mathematisches Institut
Roxeler Str. 64

4400 Münster

Herrn
Dr. Roland Schwänzl
Universität Osnabrück
Albrechtstr. 28
6

4500 Osnabrück

Herrn
Prof. Dr. L. Miller
Fakultät für Mathematik
Englerstr.

7500 Karlsruhe

Herrn
Dr. Andreas Stieglitz
Abteilung Mathematik
Universitätsstr. 150
Gebäude NA

463 Bochum-Querenburg

Herrn
Priv.-Doz. Dr. U. Stuhler
Mathematisch-Wissenschaft
liche Fakultät
Am Wilhelmsplatz 2

3400 Göttingen

Herrn
Reinhard Wiegmann
Dipl. Math.
Universität Osnabrück
Albrechtstr. 28

4500 Osnabrück

Herrn
Prof. Dr. R. M. Switzer
Fachbereich Mathematik
Bunsenstr. 3-5

3400 Göttingen

Herrn
Prof. Dr. G. Tamme
Fachbereich Mathematik
Universitätsstr. 31

8400 Regensburg

Herrn
Prof. Dr. Elmar Vogt
Freie Universität
Berlin
Fachbereich Mathematik
FB 19
Arnimallee 2-6
1 Berlin 33

Herrn
Prof. Dr. Rainer Vogt
Universität Osnabrück
Albrechtstr. 28

4500 Osnabrück

Herrn
oProf. Dr.
Friedhelm Waldhausen
Fakultät für Mathematik
Universitätsstr.

4800 Bielefeld 1

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft