MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 5/1981

Numerische Methoden der Approximationstheorie

18. bis 24.1.1981

Die Tagung fand unter der Leitung der Herren Collatz (Hamburg), Meinardus (Mannheim) und Werner (Bonn) statt. Das Spektrum der Vorträge reichte von der klassischen Approximationstheorie über mehrdimensionale Approximationsverfahren bis hin zu praxisbezogenen Fragestellungen. Zu ersteren gehörten z.B. die Verfeinerung von Fehlerabschätzungen bei der Polynominterpolation, Fragen zur Eindeutigkeit, Charakterisierung optimaler Interpolationsprozesse und Algorithmen zur rationalen Interpolation. Zahlreiche Vorträge spiegelten zum anderen das steigende Interesse an der mehrdimensionalen Interpolation, insbesondere mit verschiedenen Arten von Splines wider. Hier standen u.a. Probleme der Parameterschätzung in der Medizin und Flugtechnik, Fragen der Approximationstheorie bei der Konstruktion von Plottern und stabile Algorithmen beim Arbeiten mit mehrdimensionalen B-Splines im Mittelpunkt des Interesses.

Die Tagung wurde abgerundet durch die zahlreichen Einzelgespräche beim Essen und in den Abendstunden bzw. auf den ausgiebigen Spaziergängen. Die Tagung lieferte einen repräsentativen Überblick über die aktuellen Trends in der Approximationstheorie.

Zum guten Erfolg der Tagung trug wie immer die hervorragende Betreuung durch die Mitarbeiter und Angestellten des Instituts sowie das verständnisvolle Entgegenkommen des Institutsdirektors, Herrn Professor Dr. Barner, bei.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

H.P. BLATT

Bemerkungen zur strengen Eindeutigkeitskonstanten

Ist $f \in C[a,b]$, V ein n-dimensionaler Unterraum von $C[a,b]$. Für die Minimallösung r^* bei der Tschebyscheff-Approximation von f bezüglich V gilt

$$||f-v|| \geq ||f-v^*|| + \gamma_n(f) \; ||v-v^*||$$

für alle $v \in V$ mit $\gamma_n(f) \geq 0$. Für $V = \Pi_n$ wird das asymptotische Verhalten von $\gamma_n(f)$ für $n \to \infty$ untersucht. Es wird gezeigt, daß $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(f) = C$ ist, falls die Anzahl der mehrpunktigen Vorzeichenkomponenten der Alternantenmenge einer gewissen Beschränkung unterliegt. Wir definieren strenge H-Mengen, die selbst bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung zu Fehlerabschätzungen für beste Approximationen führen. Konstruktionsverfahren für solche H-Mengen werden aus verallgemeinerten Remes-Algorithmen entwickelt.

M. BRANNIGAN

An adaptive multivariate data fitting algorithm

Problems in the approximation of data which contain measurement or experimental error arise in many scientific disciplines. Given data points (t_s, y_s), $s=1,\dots,N$, where $t_s \in \mathbb{R}^n$, $y_s \in \mathbb{R}$, we suppose the existence of a relationship $y_s = \phi(t_s) + e_s$. If no a priori knowledge is available concerning the form of the function ϕ then piecewise approximants to ϕ are useful. To this end 'knots' $\{k_{ij} \in \mathbb{R} : 1 \leq i \leq j, 1 \leq j \leq m_j\}$ are prescribed for each of the variables x_j in the space $\mathbb{R}^n$. Over each region $S_\ell = \{x : k_{\ell_j,j} \leq x_j \leq k_{\ell_j+1,j}$, $\ell = (\ell_1,\dots,_n)\}$ an approximation to the data in S_ℓ is found with prescribed smoothness at the boundaries. Appropriate approximants are given by the tensor product of piecewise polynomials. The difficult problem is to estimate how many knots are necessary: that is, to find m_j, $j=1,\dots,n$, so that ϕ is approximated well while the influence of the errors e_s is minimal. We achieve this estimation by increasing the values of m_j and testing each resulting approximation against the information-theoretic criterion of Akaike, which test subsumes a knowledge of the form of the underlying distribution of the e_s. Our results show, however, that the algorithm is more sensitive to the choice of norm used to find the approximation than to the assumed distribution of errors.

H. BRASS

<u>Numerische Berechnung konjugierter Funktionen</u>

Zur praktischen Bestimmung der zu f konjugierten Funktion $K[f]$ wird meist das Wittich-Verfahren herangezogen. Es besteht darin, das trigonometrische Interpolationspolynom $T_n[f]$ mit 2n äquidistanten Stützstellen zu bilden und $K[f]$ durch $K[T_n[f]]$ zu ersetzen. Für dieses Vorgehen wird die folgende unverbesserbare Fehlerabschätzung bewiesen:

$$|K[f](x) - K[T_n[f]](x)| \leq c_s(x) \frac{\ln n}{n^s} ||f^{(s)}||_\infty \quad ,$$

$$c_s(x) = \pi^{s-1} \int_0^1 |2 B_s(\nu) - \cos n x \, E_{e-1}(\nu)| d\nu + o\ (1) \quad ,$$

B_s : Bernoulli-Polynom, E_s : Eulerpolynom.

Für andere Algorithmen zur numerischen Bestimmung von $K[f]$, die sich auf 2n äquidistante Funktionswerte stützen, kann die Fehlergrößenordnung $n^{-s} \ln n$ nicht verkleinert werden, wohl aber $c_s(x)$.

A. BULTHEEL

<u>A special Laurent-Hermite interpolation problem</u>

A rational Laurent-Hermite interpolation problem is an interpolating variant of the Laurent-Padé problem. We study the problem where the approximant has a numerator with prescribed zero structure. These zeros are used as the interpolation points. The denominator is then determined recursively to satisfy the Laurent-Hermite interpolation requirements. If certain symmetry conditions are satisfied, the algorithm of Nevanlinna-Pick and the Schur algorithm are found as special cases. The algorithm can also be interpreted as a coupled recursion for classes of bi-orthogonal functions in rational function-spaces defined w.r.t. the interpolation points and an indefinit scalar product defined with the aid of the given Laurent series. In the Nevanlinna-Pick case, this scalar product is positive definite and the solution can be given a least squares interpretation. The interpolation points can then be chosen in an optimal way w.r.t this criterion. Numerical examples of the latter are given.

R. COLGEN

Parametrische semi-infinite Optimierung und eine Anwendung in der Kontrolltheorie

Wir beschäftigen uns mit der Ober- und Unterhalbstetigkeit der Menge der optimalen Lösungen für parametrische semi-infinite lineare Optimierungsprobleme: Minimiere $p \cdot x$ unter den Nebenbedingungen $a(t) \cdot x \leq b(t)$ für alle $t \in T$, wobei $p \in \mathbb{R}^m$, T ein kompakter Hausdorffraum ist und $a : T \to \mathbb{R}^m$ und $b : T \to \mathbb{R}$ stetig sind. (Wir betrachten Parameter (p,a,b) im Parameterraum $\mathbb{R}^m \times C(T;\mathbb{R}^m) \times$ $\times C(T;\mathbb{R})$.) Die dabei erhaltenen Resultate werden in der Kontrolltheorie angewandt: Unter der Bedingung der allgemeinen Lage kann die stückweise Stetigkeit zeitoptimaler Kontrollen gefolgert werden bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen als Bewegungsgleichungen und (unterhalbstetig) zeitabhängigem konvex- und kompaktwertigem Steuerbereich.

W. DAHMEN

Numerical evaluation of inner products of multivariate B-splines and least squares approximation

In the first part of this paper we present and discuss recurrence relations for a numerically stable evaluation of integrals and inner products of multivariate B-splines. These formulas serve as basic ingredients for a least squares scheme which is based on certain collections of multivariate B-splines forming well conditioned basis for smooth spline spaces.

PH. DEFERT

Chebyshev approximation by multivariable polynomials

In two recent papers, Carasso and Laurent have thoroughly investigated an algorithm proposed by Töpfer to ensure convergence of the exchange algorithm in the absence of Haar's condition. This contribution presents a modified version of the foregoing algorithm which amounts to dividing the whole approximation problem into subproblems of lower dimension.
Moreover, in case of nonuniqueness, it computes the strict approximation which, in some sense, is an optimal way of choosing one solution among all best approximations. As a natural consequence of the proposed algorithm, one is led to consider the minimal H-sets introduced by Collatz. If these H-sets are well understood for first degree multivariable polynomials, much less is known on higher degree polynomials. The contribution gives a complete classification of the subclass of so-called degenerate minimal H-sets for two-variable polynomials of any degree. Finally, numerical results are provided to illustrate the efficiency of the algorithm.

M.H. GUTKNECHT

Carathéodory-Fejér-Approximation periodischer Funktionen

Der Satz von Carathéodory und Fejér sowie dessen Verallgemeinerung von Takagi führen auf äusserst effiziente, kürzlich von L.N. Trefethen und anderen vorgeschlagene Methoden zur Approximation eines gegebenen Polynoms (hohen Grades) durch ein Polynom niedrigeren Grades bzw. durch eine rationale Funktion auf dem Einheits-

kreis. Aufgrund einiger Verschärfungen der Resultate von Takagi gelingt es uns, das dabei zunächst zu lösende erweiterte Approximationsproblem vollständig (d.h. auch wenn Degeneration auftritt) zu diskutieren und verschiedene Eigenschaften der zugehörigen CF-Tafel nachzuweisen.
Mittels einer Idee, die auch in der Padé-Approximation Anwendung gefunden hat, ist es weiter möglich, die CF-Approximation durch komplexe (Laurent-CF) und reelle (Fourier-CF) trigonometrische rationale Funktionen sowie durch gewöhnliche reelle rationale Funktionen (Tschebyscheff-CF) zu definieren.

D.C. HANDSCOMB

Conditions for a smooth junction between three quasi-rectangular patches

In the context of the representation of C^2 three-dimensional surfaces by vector-valued bicubic splines on rectangular grids, we discuss conditions for three such surfaces to meet with C^2 continuity along their common grid lines, with particular attention to the smoothness at the common point. These conditions can not be met by pure bicubic splines, but can be met by allowing the polynomial to have degree 6 in the three patches immediately surrounding the common point. [Pictorial illustrations will, it is hoped, appear in the published version.]

R. HAVERKAMP

Zum Fehler der Ableitungen bei Interpolation

Es wird untersucht, wie gut bei Interpolation glatter Funktionen durch algebraische bzw. trigonometrische Polynome die Ableitungen der gegebenen Funktionen durch die des Interpolationspolynoms wiedergegeben werden. Die Fehler werden in der Maxinumnorm gemessen und mit dem Approximationsfehler verglichen. Bei algebraischer Interpolation werden für erste und zweite Ableitungen annähernd gleich gute Fehlerschranken, wie für den Interpolationsfehler selbst, erzielt. Bei trigonometrischer Interpolation erhält man entsprechend gute Abschätzungen auch für höhere Ableitungen.

K. NIXDORF

Approximation einiger Flugbahnen

Es wird berichtet über die Approximation bereits geflogener Flugbahnen, über die Approximation von Flugbahntafeln und über die Extrapolation von Flugbahnen.

Bei der Approximation bereits geflogener Flugbahnen wird eingegangen auf die Wertebereiche der Flugbahnparameter, über die Meßfehler, auf überlagernde Schwingungen, auf die Meßzykluszeit, auf die Rechenzykluszeit und auf die verschiedenen Beschränkungen der Flugbahnprofile und Ansätze.

Es werden Auszüge aus den Flugbahntafeln angegeben und erläutert, wie sich deren Ersatz durch Formeln im Laufe der letzten 10 Jahre änderte.

Bei der Extrapolation von Flugbahnen wird unterschieden zwischen Suchproblemen und Treffproblemen. Bei den Suchproblemen werden die verschiedenen Suchbereiche aufgezeigt. Bei den Treffproblemen werden die gängigen Ansätze und ihre Schwierigkeiten in Abhängigkeit von den Meßfehlern, der Ziffernlänge und der Art der Flugbahnen beschrieben und zwei neue Verfahren zur Extrapolation geschildert. Das eine Verfahren beruht auf einer Übertragung der PID-Regelvorschrift und weiteren Regelvorschriften, das andere Verfahren ist ein adaptives Verfahren, bei dem an Standardflugbahnen angepaßt wird und die Menge der zur Verfügung stehenden Standardflugbahnen um jene Flugbahntypen automatisch vermehrt wird, an die noch nicht erfolgreich angepaßt werden konnte.

G. OPFER

Approximations with complex planar splines

A complex planar spline (for short c.p.s) will be defined as a continuous, complex valued function defined piecewise on a grid. The "pieces" (i.e. restrictions to the meshes) will be called elements. In a triangular grid, elements of the form $p(z)=a+bz+c\bar{z}$ will be considered. In a rectangular grid with sides parallel to the axes, elements of the form $p(z)=a+bz+c\bar{z}+d(z^2-\bar{z}^2)$ will be used. It will be remarked that holomorphic elements cannot be used, since the continuity requirement would imply that the c.p.s. consists of just one holomorphic function in the whole grid. Properties of c.p.s. including an error analysis for interpolating c.p.s. are given. Some numerical results exhibiting the convergence behavior of interpolating c.p.s. are represented. Collaboration with Glenn Schober, Bloomington, USA, is acknowledged.

P.W. PEDERSEN

Some remarks on the computation of square roots

After some didactic remarks related to Newton's formula for $\sqrt{A}$: $aa := \frac{1}{2}\left\{a + \frac{A}{a}\right\}$ I have shown that faster convergence is obtained if after each step aa is replaced by $aa^* := k \cdot aa$ with k as a SA number $\simeq 1/\sqrt{1+ER\_}$, $ER\_ := |\min_x ER[aa;x]|$, ER being the relative error of aa, and SA being numbers by which you can multiply using Shift and Addition instead of ordinary multiplication. Next it was shown that $p\left[a + \frac{A}{a}\right]$ would give $\sqrt{A}$ exactly for

$$p=0,5 - \frac{1}{16}r^2\left[1 - r + \frac{13}{16}r^2 - \frac{5}{8}r^3 + \frac{61}{128}r^4 - + \ldots\right],\ r:=(A-a^2)/a^2 -$$

but it has not (yet) been possible to give this expression a useful form. However, from this p you are led to 'formula producing formulas' like $APPROX_{n+1} := \frac{A + a \cdot APPROX_n}{a + APPROX_n}$, where $a \simeq \sqrt{A}$, $APPROX_n = APPROX_n\left[a;A\right]$ being an expression giving $\simeq \sqrt{A}$ in terms of a and A, and $APPROX_{n+1}$ will be a new, and better (by order 1) approximation. For $APPROX_1 := a$ you get Newton's formula, Halley's formula, a well-known 4'th order formula and $APPROX_5 = a\left[10A^2 + 20a^2A + a^4\right] / \left[2A^2 + 20a^2A + 10a^4\right]$ with relative error $ER_{n+1} \simeq \frac{1}{16}(ER_n)^5$ and only one division for each step. As a division-free algorithm was mentioned the AEGP algorithm:

$x_o := A$, $d_o := A$, $x_{n+1} := x_n\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}d_n\right]$, $d_{n+1} := d_n\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}d_n\right]^2$. Since $d_{n+1} = \Psi(d_n)$ it is easy enough to show that $d_n \to 1$ and then that $x_n \to \sqrt{A}$. But in general iterations $x_{n+1} = \varphi(x_n, d_n)$ are difficult to handle. In this case an equivalent one of form $u_{n+1} = \Psi(u_n)$ is $u_o := A$, $u_{n+1} := \frac{1}{2}\left[u_n\left(3 - \frac{u_n^2}{A}\right)\right]$ with 1 division to startet. By using $x_o := k \cdot A$, $a_o := k^2 A$, $k \simeq 1/\sqrt{A}$ fast convergence is obtained. Finally it was shown that iteration like for $\sqrt{x}$ could also be used f.ex. for sin x by using $APPROX_{n+1}(x) := \int_A^B h(x,\xi)\, APPROX_n(\xi)\, d\xi$ with h f.ex. as the Greens function for the differential operator giving sin(x) oder [A,B].

O. POKORNÁ

<u>Approximative Matrizeninversion durch Aggregation</u>

Blockmatrizen werden invertiert, die in der Form $A=H-S$ ausgedrückt werden können, wobei H leicht invertierbar ist, und alle Elemente von S in jedem Block "fast" denselben Wert haben. Die gesuchte Inverse von A wird durch die Inverse von einer Matrix $\tilde{A}$ approximiert, deren Elemente in jedem Block der entsprechenden Zerlegung einander gleich sind. Zu der Invertierung von $\tilde{A}$ wird die Methode der Aggregation benutzt, deren theoretische Grundlagen von M. Fiedler und V. Pták gegeben wurden. Die Methode wurde in der Diplomarbeit von I. Prágerová untersucht und numerisch erprobt. Als Spezialfall wurden Leontjev Matrizen invertiert.

P.O. RUNCK

Konstanten im Approximationssatz von Teljakowskii

1966 wurde von Teljakowskii die folgende Verschärfung des Approximationssatzes von Jackson Timan gezeigt.
Satz (Teljakowskii): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante A_r, so daß für alle $n \geq r-1$ ein Polynom p vom Grad $\leq n$ existiert mit

$$\forall x \in [-1,1] \quad |f(x)-p(x)| \leq A_r \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \omega\left(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)$$

Durch Zurückführung des algebraischen Problems auf ein geeignetes 2π-periodisches Problem hat H. Sinwel (Linz) für den Fall $f \in C^r[-1,1]$ für diesen Approximationssatz Konstanten angegeben. Es gilt mit $||f^{(r)}|| = \max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(r)}(x)|$ der

Satz: Für jedes $r \in \mathbb{N}$ und für jedes $f \in C^r[-1,1]$ existiert für jedes $n \geq r$ ein Polynom p vom Grad $\leq n$, so daß gilt

$$\forall x \in [-1,1] \quad |f(x)-p(x)| \leq \frac{11}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^r \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r}{n(n-1)\dots(n-r+1)} ||f^{(r)}||$$

R. SCHABACK

Optimale Interpolationsprozesse in Hardy-Räumen

Normiert man den Fehler eines allgemeinen Interpolations (oder eines allgemeinen Projektions-) verfahrens auf einen Hardy-Raum dadurch, daß man die Einschränkung auf gewisse Teilbereiche betrachtet (etwa einen inneren Kreis oder ein reelles Intervall), so erhält man natürliche Kriterien, die Qualität dieser Prozesse zur numerischen Approximation zu untersuchen. Dies wird für einige Spezialfälle explizit durchgeführt. Es zeigt sich, daß die polynomische Hermite-Interpolation (d.h. die Taylorreihe) optimal ist, wenn der Fehler auf inneren Kreisen gemessen wird (Maximums- und L_2-Norm). Schränkt man die Fehlerbetrachtung auf reelle Intervalle ein, so ergeben sich Optimallösungen durch

a) eine Verallgemeinerung der Tschebyscheff-Polynome in Form gewisser rationaler Funktionen (Maximums-Norm) bzw.

b) Projektion auf ein im Hardy-Raum und in L_2 auf dem betrachteten Interval zweifach orthogonales Funktionssystem (L_2-Norm), das Eigensystem eines kompakten Integraloperators ist.

Beide Lösungen werden durch graphische Darstellungen und Zahlen illustriert.

R. SCHMITT

Ein Parameteridentifizierungsproblem aus der Pulsradiolyse

Zur Aufklärung schnell ablaufender chemischer Prozesse, die durch pulsradiolytische Methoden ausgelöst und beobachtet werden, werden mathematische Methoden benötigt. Die Daten (Modellgleichung und Experimentdaten) erlauben eine Formulierung als nichtlineare Ausgleichsaufgabe mit gewöhnlichen Differentialgleichungen als Nebenbedingungen. Die direkte Behandlung dieses Problems mit ableitungsfreien Methoden führt zu Unsicherheiten über die Güte der erzielten Lösung. Die Anwendung kontrolltheoretischer Methoden liefert eine nichtlineare Randwertaufgabe von relativ komplizierter Struktur. Das Erfülltsein dieser für eine Optimallösung notwendigen Bedingungen läßt sich jedoch numerisch zuverlässig feststellen.

H.J. TÖPFER

Zwei Modelle zur glatten Kurveninterpolation

Bei der numerischen Steuerung von Plottern oder Werkzeugmaschinen mit einem Minimum an externer Information tritt das Problem der "glatten" Kurveninterpolation auf:

Seien $p_o,\dots,p_n \in \mathbb{R}^m$ (m=2 oder 3) gegebene Punkte. Gesucht sind Parameter $t_o<t_1<\dots<t_n$ und eine "Kurve" $x(\cdot) \in (C^1[t_o,t_n])^m$, so daß $x(t_i)=p_i$ $(i=0,\dots,n)$. Die über die C^1-Eigenschaft hinausgehende Glattheit wird durch ein geeignetes Funktional $J(x)$ gemessen, das für die optimale Kurve $x(\cdot)$ ein Extremum annimmt.

Es werden mit Hilfe variationstheoretischer Methoden zwei Modelle diskutiert:

1. $J(x) := \int_{t_o}^{t_n} (\ddot{x},\ddot{x})\,dt \stackrel{!}{=} \text{Min.}$

2. $J(x) := \int_{t_o}^{t_n} (\ddot{x},\ddot{x})\,dt \stackrel{!}{=} \text{Min.}$ unter der Nebenbedingung, daß

   $(\dot{x},\dot{x}) = 1$, d.h. der Parameter t die Bogenlänge ist.

Das zweite Modell führt zu einer konstanten Geschwindigkeit des zu steuernden Werkzeugs, was in vielen Fällen erwünscht ist.

C.R. TRAAS

Spline approximation as a tool for estimation

The functions, describing the time evolution of a dynamic system, are approximated by means of splines. The unknown spline coefficients are estimated by processing noisy measurements of observable system variables.
The method has been tested for an example system consisting of an actively stabilized spacecraft, using the outputs of an on-board rate gyro and of an on-board star sensor as observations.

G.A. WATSON

A globally convergent method for (constrained) nonlinear continuous L_1 approximation problems

Let $f,g : X \times R^n \to R$ be C^1 functions of their parameters, and consider the problem

$$\text{find } a \in R^n \text{ to minimise } \|f(x,a)\|$$

$$\text{subject to } g(x,a) \le 0 , \quad x \in X ,$$

where $X = [a,b]$ and the norm is the L_1 norm defind on X .

A globally convergent method, based on the use of an exact penalty function, is presented which is capable of converging at a second order rate if exact second derivative information is also available. An important particular example of this problem is the one-sided problem, where $g=f$, which arises naturally in applications. In this case, the presence of the norm has no real significance (and also the restriction to X an iter readily be removed). For the general problem, a procedure for handling the objective function is suggested which does not require second derivatives of f. This method is illustrated by its application to a number of problems in the special case when no constants are present.

L. WUYTACK

An application of the generalized qd algorithm

A convergence theorem for multipoint Padé approximants will be given. This result generalizes a result of Montessus de Ballore. The generalized qd algorithm can be used to compute multipoint Padé approximants. Convergence properties of the columns and rows in the corresponding scheme will be investigated. These properties will permit to use the generalized qd scheme to obtain simultaneously approximations for all the zeros of a polynomial.

K. ZELLER

Floppy vs. fussy approximation

The exact solution of certain problems in optimization and (multivariate) approximation provides difficulties, while presolutions can be obtained by simple methods (green mathematics, practical complexity). This is exemplified by considering descent methods for approximation of functions, using coarse grids. Information about the error between grid points is gathered by inequalities going back to M. Riesz and S. Bernstein. The corrector polynomials of the single peak type are employed to get floppy (but useful) approximations. These can be improved to best (perhaps fussy) approximations by considering H-sets on and near the grid. Numerical examples show the benefits and shortcomings of this approach (at the present state).

Berichterstatter: H. Arndt

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Liste der Tagungsteilnehmer

Herrn
Prof. Dr. J. Albrecht
Techn. Universität
Mathematisches Institut
Erzstr. 1

3392 Clausthal-Zellerfeld

Herrn
Prof. Dr. M. Brannigan
N.R.I.M.S.
C.S.I.R.
Pretoria (South Africa)

Herrn
Prof. Dr. E. Allgower
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Bonn
Wegelerstr. 6

5300 Bonn 1

Herrn
Prof. Dr. H. Braß
Lehrstuhl E f. Mathematik
der Universität Braunschweig
Pockelstr. 14

3300 Braunschweig

Herrn
Dr. H. Arndt
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Bonn
Wegelerstr. 6

5300 Bonn 1

Herrn
Prof. Dr. A. Bultheel
K.U. Leuven
AFD. Toeg.Wisk. & Progr.
Celestynenlaan 200 A

B-3030 Heverlee (Belgien)

Herrn
Prof. Dr. H.P. Blatt
Fakultät f. Mathematik u. Informatik
Universität Mannheim
Seminargebäude A5

6800 Mannheim

Herrn
Rainer Colgen
Fachbereich Mathematik
der Universität Frankfurt/M
Robert-Mayer-Str. 6-10

6000 Frankfurt/M 1

Herrn
Prof. Dr. K. Böhmer
Fachbereich Mathematik
der Universität Marburg
Lahnberge

3550 Marburg

Herrn
Prof. Dr. L. Collatz
Institut für Angewandte Mathematik
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Herrn
Prof. Dr. D. Braess
Mathematisches Institut
der Ruhr-Universität
Universitätsstr. 150

4630 Bochum

Herrn
Dr. W. Dahmen
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Bonn
Wegelerstr. 6

5300 Bonn 1

Herrn
Dr. Ph. Defert
Dpt. of Mathematic
F.U.N
8, rempart de la Vierge
B5000 Namur (Belgien)

Herrn
Prof. Dr. D.C. Handscomb
Oxford University
Computing Laboratory
19 Parks Road
Oxford OX1 3PL (England)

Herrn
Prof. Dr. F.-J. Delvos
Fachbereich Mathematik
der Universität Siegen
Hölderlinstr. 3
5900 Siegen 21

Herrn
Prof. Dr. K.H. Hoffmann
Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik III
Arnimallee 2-6
1000 Berlin 33

Herrn
Prof. Dr. C. Geiger
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Hamburg
Bundesstr. 55
2000 Hamburg 13

Herrn
Prof. Dr. G. Meinardus
Lehrstuhl Mathematik IV
Universität Mannheim
Seminargebäude A5/B123
6800 Mannheim 1

Herrn
Prof. Dr. K. Glashoff
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Hamburg
Bundesstr. 55
2000 Hamburg 13

Herrn
Prof. Dr. G. Merz
Fachbereich 17 - Mathematik
der Gesamthochschule Kassel
Wilhelmshöher Allee 73
3500 Kassel

Herrn
Uwe Grothkopf
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Hamburg
Bundesstr. 55
2000 Hamburg 13

Herrn
Prof. Dr. M.W. Müller
Lehrstuhl Mathematik
Postfach 500 500
4600 Dortmund 50

Herrn
Prof. Dr. M. Gutknecht
Seminar für Angewandte Mathematik
ETH - Zentrum HG
CH-8092 Zürich (Schweiz)

Herrn
Prof. Dr. K. Nixdorf
Hochschule der Bundeswehr Hamburg
Fachbereich Maschinenbau
Holstenhofweg 85
2000 Hamburg 70

Herrn
Dr. R. Haverkamp
Institut für Numerische Mathematik
der Universität Münster
Roxeler Str. 64
4400 Münster

Herrn
Dr. G. Nürnberger
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Erlangen-Nürnberg
Martensstr. 3
8520 Erlangen

Herrn
Prof. Dr. W. Oettli
Fakultät für Mathematik u.Informatik
der Universität Mannheim
Seminargebäude A5

6800 Mannheim 1

Herrn
Prof. Dr. G. Opfer
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Hamburg
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Herrn
Prof. Dr. D. Pallaschke
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Bonn
Wegelerstr. 6

5300 Bonn 1

Herrn
Dr. P.W. Pedersen
Dept. of Mathematics
DTH. Bg. 303
DK-2800 Lyngby
(Dänemark)

Frau
Dr. Olga Pokorna'
Matematicko-Pysika'lni' Fakulta
Universita Karlowa
Malostranske' Na'm. 25

118 00 Praha 1 (Tschechoslowakai)

Herrn
Prof. Dr. M. Reimer
Abt. Mathematik der Universität
Dortmund
Postfach 500 500

4600 Dortmund 50

Herrn
Prof. Dr. P.O. Runck
Mathematisches Institut
der Universität Linz
Altenbergerstraße

A-4040 Linz (Österreich)

Herrn
Prof. Dr. R. Schaback
Lehrstühle für Numerische und
Angewandte Mathematik
der Universität Göttingen
Lotzestr. 16-18
3400 Göttingen

Herrn
Prof. Dr. W. Schempp
Lehrstuhl für Mathematik I
der Universität Siegen
Hölderlinstr. 3

5900 Siegen 21

Herrn
Prof. Dr. K. Scherer
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Bonn
Wegelerstr. 6

5300 Bonn 1

Herrn
Prof. Dr. G. Schmeißer
Mathematisches Institut
der Universität Erlangen-Nürnberg
Bismarckstr. 1 1/2

8520 Erlangen

Herrn
Dr. R. Schmidt
Hahn-Meitner-Institut
für Kernforschung GmbH, Bereich D
Glienicker Str. 100

1000 Berlin 39

Herrn
Prof. Dr. F. Schurer
Technological University Eindhoven
Dep. of Math.

Eindhoven (Niederlande)

Herrn
Prof. Dr. W. Sippel
Fachbereich 17
Gesamthochschule Kassel
Wilhelmshöher Allee 73

3500 Kassel

Herrn
Dr. M. Sommer
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Erlangen-Nürnberg
Martensstr. 3

8520 Erlangen

Herrn
Prof. Dr. G.A. Watson
Department of Mathematics
University of Dundee
Dundee DD14HN
(Schottland)

Herrn
Georg Still
Universität Mannheim
Seminargebäude A5/B124

6800 Mannheim 1

Herrn
Prof. Dr. H. Werner
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Wegelerstr. 6

5300 Bonn 1

Herrn
Prof. Dr. H. Strauß
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Erlangen-Nürnberg
Martensstr. 3

8520 Erlangen

Herrn
Prof. Dr. W. Wetterling
Techn. Hogeschool Twente
Onderafdeling TW
Postbus 47

7500 AE Enschede Niederlande

Frau
G.A. Theuschl
Klobensteiner Str. 32

8000 München 90

Herrn
Prof. Dr. L. Wuytack
University of Antwerp
Dept. of Mathematics
Universiteitsplein 1

B-2610 Wilryk (Belgien)

Herrn
Prof. Dr. H.J. Töpfer
Hahn-Meitner-Institut für Kern-
forschung GmbH, Bereich D
Glienicker Str. 100

1000 Berlin 39

Herrn
Prof. Dr. K. Zeller
Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Auf der Morgenstelle 10

7400 Tübingen

Herrn
Prof. Dr. C.R. Traas
Technische Hogeschool Twente

7500 Enschede (Niederlande)

Herrn
Prof. Dr. R. Zielke
Fachbereich 6 - Mathematik
der Universität Osnabrück
Albrechtstr. 28

4500 Osnabrück

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft