MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 7/1982

Funktionentheorie

14.2. bis 20.2.1982

Die Tagung "Funktionentheorie" fand in diesem Jahr wieder vom 14. bis 20. Februar statt. Die Leitung der Tagung hatten die Herren E. Mues (Hannover), Ch. Pommerenke (Berlin) und K. Strebel (Zürich) übernommen. Das große Interesse an dieser Tagung verdeutlicht die Zahl von 45 Teilnehmern, davon 24 Teilnehmer aus dem Ausland.

Die Themenschwerpunkte dieser Tagung waren "H^p-Räume" und "Geometrische Methoden in der Funktionentheorie". Eine Vielzahl an Vorträgen über neueste Ergebnisse auf beiden Gebieten gab Anlaß zu regen und fruchtbaren Diskussionen.

Teilnehmer

J.M. Anderson, London
J. Becker, Berlin
H. Begehr, Berlin
J. Clunie, London
P. Duren, Ann Arbor
H. Epheser, Hannover
K. Faulstich, Trier
R. Fehlmann, Zürich
F. Gackstatter, Berlin
D. Gaier, Gießen
J. Garnett, Los Angeles
F.W. Gehring, Ann Arbor
H. Grunsky, Würzburg
K. Habetha, Aachen
W.K. Hayman, London
M. Heins, College Park
F. Huckemann, Berlin
K.-H. Indlekofer, Paderborn
P. Jones, Chicago
V. Kasten, Hannover
W. Kirwan, College Park
W. Luh, Trier

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

K. Menke, Dortmund
Ch. Meyer, Bern
E. Mues, Hannover
A.G. O'Farrell, Kildare
K. Oikawa, Tokio
E. Peschl, Bonn
A. Pfluger, Zürich
G. Piranian, Ann Arbor
Ch. Pommerenke, Berlin
L. Reich, Graz
M. Reimann, Bern
M. v.Renteln, Karlsruhe
B. Rodin, La Jolla
St. Ruscheweyh, Würzburg
G. Schmieder, Hannover
H.S. Shapiro, Stockholm
A. Shields, Ann Arbor
H. Stegbuchner, Salzburg
K. Stephenson, Knoxville
K. Strebel, Zürich
H. Tietz, Hannover
G. Weißenborn, Berlin
S. Xie-Chang, Peking

Vortragsauszüge

J.M. ANDERSON: Bers Spaces and Quasi-conformal Disks

For a bounded Jordan Domain D denote by $A_q(D)$ the Bers space of functions f(z) analytic in D for which the norm

$$\|f\|_q = \iint_D |f(z)|\lambda_D^{2-q}\,dx\,dy$$

is finite. Here λ_D denotes the Poincaré metric in D. In the case when D is a quasi-disk (so that ∂D may be non-rectifiable) define q_0 by

$$q_0 = \inf\{q : \iint_D \lambda_D^{2-q}\,dx\,dy < \infty\}.$$

Then the polynomials are dense in $A_q(D)$ for all $q > q_0$. One can show by example that q_0 may be greater than 1.

H. BEGEHR: Randwertprobleme für Systeme mit Cauchy-Riemannschem Hauptteil

Für die nichtlineare Gleichung

$$w_{\bar z} = H(z,w,w_z)$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

werden das Riemann-Hilbertsche Randwertproblem und das lineare Kopplungsproblem mit Hilfe einer Einbettungsmethode und dem Newtonschen Approximationsverfahren gelöst.

Wesentliche Hilfsmittel sind aus der Theorie der analytischen (Satz von Privalow) und der pseudoanalytischen (Hilbert-Transformation) Funktionen entnommen. Die Voraussetzungen an H, Meßbarkeit in z, Lipschitz-Bedingungen in w und w_z, bedeuten Elliptizität der Gleichung und höchstens lineares Wachstum in w.

Die Ergebnisse wurden zusammen mit G.N. Hile und G.C. Hsiao erhalten.

J. CLUNIE: <u>On the level sets of bounded analytic functions</u>

A number of authors have given constructions for functions bounded, non-constant and analytic in the unit disc having level sets of infinite length. In some cases it is clear that though the level sets are of infinite length each component is of finite length. In other cases it is not clear whether or not there are components of level sets having infinite length.

An example of a non-constant, bounded, analytic function having a level set component of infinite length is the following:

$$e^{iB(z)}, \qquad B(z) = \prod_{1}^{\infty} \left(\frac{\rho_\nu - z}{1-\rho_\nu z}\right)^{n_\nu},$$

where $\sum n_\nu (1-\rho_\nu) < \infty$ and $\sum n_\nu (1-\rho_\nu) \log n_\nu = \infty$ and the sequences $\{\rho_\nu\}$, $\{n_\nu\}$ are suitably chosen. The fundamental step is to estimate the length of the part of $\{z:$ $\mathrm{Im}\,\left(\frac{\rho-z}{1-\rho z}\right)^n = 0\}$, where $0 < \rho < 1$, $n \in \mathbb{N}$, that lies in $\{\eta < |z| < 1\}$.

P.L. DUREN: Recent progress on support points of S

S is the usual class of functions $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ analytic and univalent in the unit disk $\mathbb{D}$. A support point is a function $f \in S$ which maximizes Re $\{L\}$ for some continuous functional L not constant on S. It is well known that each support point maps $\mathbb{D}$ onto the complement of an analytic arc Γ satisfying the differential equation $w^{-2} L(f^2/(f-w))\,dw^2 > 0$ and having radial angle less than $\pi/4$ in magnitude, except perhaps at the finite endpoint. In particular, Γ has monotonic modulus. Recent results give evidence for the conjecture that Γ also has monotonic argument. An elementary example (due to K. Pearce) where Γ is a half-line shows that the radial angle may equal $\pi/4$ at the tip. Whenever $\pi/4$ is attained, however, we find (in joint work with M. Schiffer and Y.J. Leung) that Γ must satisfy a second (independent) differential equation. This is a strong requirement which has some interesting consequences.

K. FAULSTICH: Approximation analytischer Funktionen durch Riesz-Verfahren

Es sei $p = \{p_\nu\}$ eine Folge komplexer Zahlen, und für eine Teilfolge $M = \{m_k\}$ der nichtnegativen ganzen Zahlen gelte $P_{m_k} := \sum_{\nu=0}^{m_k} p_\nu \neq 0$. Dann definiert die Matrix $A = (\alpha_{k_\nu})$ mit den Elementen $\alpha_{k_\nu} = \frac{p_\nu}{P_{m_k}}$ $(0 \le \nu \le m_k)$, $\alpha_{k_\nu} = 0$ $(\nu > m_k)$ ein Limitierungsverfahren, welches wir als Riesz-Verfahren (R,p,M) bezeichnen (im Spezialfall $m_k = k$ kurz mit (R,p)). Wir erhalten folgende Ergebnisse:

1) Es sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ eine Potenzreihe vom Konvergenzradius 1. Genau dann existiert ein permanentes (R,p)-Verfahren, welches f in einem Gebiet $G \neq \mathbb{D}$, $G \supset \mathbb{D}$ kompakt summiert, wenn f überkonvergent ist.

2) Für ein Riesz-Verfahren (R,p) sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{p_n}{P_n}\right|^{1/n} =: q < 1$.

b) Jede Potenzreihe vom Konvergenzradius 1 ist in $|z| < \frac{1}{q}$ kompakt (R,p)-summierbar.

3) Es gibt ein permanentes (R,p,M)-Verfahren, welches die geometrische Reihe auf vorgeschriebenen Gebieten kompakt zu vorgeschriebenen Funktionen summiert.

4) Es gibt ein - in einem gewissen Sinn - universelles permanentes (R,p,m)-Verfahren, welches bei Anwendung auf $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$ zur Approximation beliebiger Funktionen auf beliebigen Mengen geeignet ist.

5) Zu jedem zeilenfiniten Matrixverfahren A gibt es ein permanentes (R,p,M)-Verfahren, welches bei Anwendung auf $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$ "fast das gleiche" leistet wie das Verfahren A.

R. FEHLMANN: Absolutely extremal quasiconformal mappings

We consider the induced boundary mapping μ of a quasiconformal mapping of the unit disc onto itself. For a given radius r, $0 \le r < 1$, we consider all q.c. extensions of μ into the annulus $D_r = \{r < |z| < 1\}$. An extremal mapping in this class is called absolutely extremal. We prove the Theorem:

As long as an absolutely extremal mapping f has no essential boundary point, it must have the following properties:

a) f is a Teichmüller mapping with associated quadratic differential ϕ of finite norm;

b) the boundary $|z| = r$ consists of horizontal trajectories of ϕ and zeroes;

c) the interior component of the boundary of $f(D_r)$ contains no free analytic boundary arc.

F. GACKSTATTER: Über Ausnahmerichtungen bei vollständigen Minimalflächen

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist folgendes Resultat von Ahlfors und Osserman aus dem Jahre 1959: Sei S eine vollständige Minimalfläche im $\mathbb{R}^3$. Dann ist S entweder eine Ebene, oder die Menge E, die bei der Gaußschen Abbildung ausgelassen wird, hat Kapazität Null. Für spezielle Flächenklassen hat man schärfere Resultate: Der Normalenvektor einer Fläche S von endlicher Gesamtkrümmung kann höchstens 3 Richtungen auslassen (Osserman), der einer Abelschen Minimalfläche höchstens 4 Richtungen (Verf.). Die Scherksche Minimalfläche hat 4 Ausnamherichtungen.

Im Jahre 1980 hat der brasilianische Mathematiker F. Xavier ein großartiges Resultat gefunden: Eine beliebige nichtebene Fläche S hat höchstens 10 Ausnahmerichtungen. In seiner Arbeit in den Annals of Mathematics 113 (1981), 211-214, wird das Ergebnis auf die Zahl 6 verschärft. Eine Beweislücke in dieser Arbeit ist inzwischen verbessert worden. Wir geben hier eine Beweisvariante, die in Zusammenarbeit mit Ch. Pommerenke gefunden wurde. Bei unserer Fragestellung kommen verschiedene Gebiete der Funktionentheorie in Anwendung.

J. GARNETT: Conformally Invariant Length Sums

Theorem 1 (Hayman-Wu): If ϕ is a conformal mapping from the unit disc D onto a domain Ω and if L is any line, then length $\phi^{-1}(L \cap \Omega) \le C_o$, where the constant C_o is absolute.

Theorem 1 is derived from

Theorem 2: If $\{D_j\}$ is a sequence of pointwise disjoint discs in D and if the harmonic measure estimate

$$\inf_{z \in D_j} \omega(D \setminus \bigcup_{k \neq j} D_k, \partial D, z) \ge a > 0, \qquad \text{all } j,$$

then

$$\sum \operatorname{diam}(D_j) \le C(a).$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Theorem 2 has a simple proof from Green's theorem, and Theorem 2, when $D_j = \{\left|\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}\right| \le \delta\}$, gives results on H^∞ interpolation sequences. (Work joint with F.W. Gehring and P.W. Jones.)

F.W. GEHRING: Injectivity of local quasi-isometries

A complex valued function f defined in a plane domain D is said to be an L-quasi-isometry if

$$(1) \qquad \frac{1}{L}|z_1-z_2| \le |f(z_1)-f(z_2)| \le L|z_1-z_2|$$

for all z_1, z_2 in D. f is said to be local L-quasi-isometry if for each $M > L$, each point in D has a neighborhood U in D such that (1) holds with L replaced by M for all z_1, z_2 in U.

Suppose that f is a local L-quasi-isometry in D. Then f need not be injective. However by a theorem of F. John, f will be injective if $L \le 2^{1/4}$ and D is a disk. We give an elementary proof of this result and give an extension for more general domains.

W.K. HAYMAN: A conformal mapping problem arising in elasticity

Let Σ be a suitably smooth Jordan curve and let $z(\theta) = x(\theta) + iy(\theta)$ be the map from $w = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, onto Σ which arises from a conformal map of $|w| < 1$ onto the interior of Σ. We denote by dash differentiation w.r.t. (θ) and consider the 3×3 matrix

$$M = \int_0^{2\pi} d\theta \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} [xx'^2, yy'^2, z'^2] = \alpha_{ij} .$$

It turns out that a certain plane stress elasticity problem has a unique solution up to rigid displacement if and only if M has rank 3. If M has lower rank there is a solution only if certain supplementary conditions are satisfied and the solution is then no longer unique. Examples will be given, when M has rank less than three and some geometrical conditions for the rank to be three.

M. HEINS: Meromorphic functions on $\mathbb{C}$ whose moduli have a level set in common

The theme of the paper, which I learned at the Tagung had been treated by Wolfgang Fuchs modulo a non-restricting Möbius transformation in his important paper of Vol. 33 of the Proc. L.M.S., is the relation between nonconstant meromorphic functions on $\mathbb{C}$ whose moduli share a level set, the value of the level being finite and positive. The result is that in the family of functions whose moduli have such a set in common, there exist "prime" members such that with the level normalized to be one, the members of the family are obtained by composition on the left with the functions meromorphic on $\hat{\mathbb{C}}$ less the set of values on the unit circumference omitted by the prime function considered which take values of modulus less than one on the open unit disk and values of modulus greater than one on the exterior of the unit disk and also the reciprocals of these functions. The paper of Fuchs uses the theory of analytic continuation, Poisson-Stieltjes representations for analytic functions with positive real part and considerations involving the topology of surfaces. My paper is based on the use of the theory of analytische Gebilde and a Schwarzian reflexion introduced in this framework.

K.-H. INDLEKOFER: Über Taylorreihen und Möbiustransformationen

Für $0 \neq \zeta \in D := \{z: |z| < 1\}$ definiere $\Phi_\zeta(z) = \frac{1-\bar{\zeta}}{1+\zeta} \cdot \frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}$ eine Möbiustransformation von D mit $\Phi_\zeta(1) = 1$. Ist $f \in H(D)$,

$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$, so sei $f_1 = f \circ \Phi_\zeta$, $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. In diesem Vortrag wird das folgende Resultat bewiesen.

Satz. Sei $0 \le \theta < 2\pi$. Dann existieren Funktionen $f \in H(\bar{D} \setminus \{e^{i\theta}\})$, so daß die Reihe $\sum a_n$ konvergiert und die Reihe $\sum b_n$ divergiert.

Es werden zwei Beweise dieses Satzes skizziert: 1) ein Beweis von J.-P. Kahane für $\theta \neq 0$, 2) ein Beweis (für alle θ), der obiges Resultat aus einem allgemeinen Ergebnis über Euler-Summierungsverfahren folgert. Dabei werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Permanenz von Euler-Verfahren angegeben.

P.W. JONES: The approximation property for BMO and L^∞/H^∞

BMO and L^∞/H^∞ have the bounded approximation property.

V. KASTEN: Bemerkungen zu close-to-convexen Trinomen

Dargestellt wurden einige Resultate über die Koeffizientenkörper $C_{k,n} := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid z + az^k + bz^n$ ist close-to-convex im Einheitskreis $D\}$, die zusammen mit G. Schmieder erhalten wurden.

Ist $(a,b) \in \partial C_{k,n}$, $f(z) = z + az^k + bz^n$ und $f' \neq 0$ in $\bar{D}$, so gibt es zwei "relevante" Wendepunkte w_λ und w_μ der Bildkurve $f(e^{it})$, $0 \le t \le 2\pi$, so daß das Tangentenargument von w_λ nach w_μ um genau π abnimmt. Im Fall $n = 2k-1$ liegen relevante Wendepunkte spiegelsymmetrisch zu $\arg w = m\pi/k-1$. Dies ermöglicht eine Parametrisierung von $\partial C_{k,2k-1}$.

Die von Q.I. Rahman stammende Frage, ob im Fall $k-1 \nmid n-1$ alle in D lokal schlichten Trinome bereits close-to-convex sind, muß negativ beantwortet werden. Für reelle Koeffizienten ist dies zwar richtig bis $n \le 25$, jedoch gibt es im Fall $(k,n) = (15,36)$ ein Gegenbeispiel.

W.E. KIRWAN: Complex Analysis

Let S denote the familiar class of univalent analytic functions f in the unit disc $D = \{z: |z| < 1\}$ with the normalization

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots , \qquad z \in D .$$

Let λ be a real-valued functional defined on S and assume $F \in S$ is a function that provides the maximum

$$\lambda(F) = \max_{f \in S} \lambda(f) .$$

Let G be analytic and univalent in D with F subordinate to G. Then there is an analytic and univalent function $w: D \to D$ such that $w(0) = 0$ and

$$F = G \circ w .$$

For $c = 1/w'(0)$, the function $cG = H \in S$. If we define

$$\hat{\lambda}(f) = \lambda(cf \circ w)$$

for $f \in S$, then H provides the maximum

$$\hat{\lambda}(H) = \max_{f \in S} \hat{\lambda}(f) .$$

Several applications of this fact will be presented.

Ch. MEYER: Parameterdarstellungen quasisymmetrischer Abbildungen

Für eine quasisymmetrische Abbildung h wird eine Parameterdarstellung $(h_s)_{s \in [0,1]}$ konstruiert und die Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial s} h_s(x) = v(h_s(x), s)$ betrachtet. v soll eine "Zygmundbedingung" erfüllen [d.h. $\left|\frac{v(x+t,s)+v(x-t,s)-2v(x,s)}{t}\right|$ soll gleichmäßig beschränkt sein].

Bei der Konstruktion von $(h_s)_{s \in [0,1]}$ werden nur reelle und eindimensionale Methoden angewandt. Schließlich wird untersucht, inwieweit sich dieses Konstruktionsverfahren auf quasikonforme Kurven anwenden läßt.

A.G. O'FARRELL: Rational approximation on plane compacta

Let X be a compact subset of the complex plane. Let $\mathcal{R}(X)$ denote the space of all rational functions with poles off X. Let $\mathcal{A}(X)$ denote the space of all complex-valued functions on X that are analytic on the interior of X. Let A(X) be a Banach space of functions on X, with $\mathcal{R}(X) \subset A(X) \subset \mathcal{A}(X)$. Consider the problems:

(1) Describe the closure of $\mathcal{R}(X)$ in A(X).

(2) For which X is $\mathcal{R}(X)$ dense in A(X)? There are many results on these problems, for various particular Banach spaces A(X). We offer a point of view from which these results may be viewed systematically.

K. OIKAWA: Existence of angular derivatives

Let f be a regular and univalent function on $S = \{z \mid |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{2}\}$ such that $\lim \mathrm{Re}\, f(x) = +\infty$ as $x = \mathrm{Re}\, z \to +\infty$. If the finite value $\lim (z - f(z))$ as $z \to +\infty$ from Stolz domains exists, then it is called the angular derivative of f at $+\infty$.

We are interested in finding conditions for the image domain $D = f(S)$ so that f has the angular derivative at $+\infty$. A necessary and sufficient condition stated in terms of extremal length has been obtained (Rodin-Warschawski, Jenkins-Oikawa).

In the special case where $D \supset \{w \mid |\mathrm{Im}\, w| < \frac{\pi}{2}\}$, we derive a condition in more elementary quantities. Assume that the accessible boundary point of D over $w = \infty$ corresponds under f to $z = +\infty$. Denote by $\delta^{\pm}(u)$ the distance between $u \pm i\frac{\pi}{2}$ and ∂D.

Theorem. f has angular derivative at $+\infty$ if and only if

$$\int^{\infty} \delta^{+}(u)\, du < \infty \quad \text{and} \quad \int^{\infty} \delta^{-}(u)\, du < \infty .$$

G. PIRANIAN: Strong Fatou-1-points of Blaschke products

If f is analytic in the unit disk, we say that a point p on the unit circle C is a strong Fatou-1-point of f provided f has the Fatou limit 1 at p and maps each Stolz angle at p into a Stolz angle.

Theorem. If M is a countable set on C, then some Blaschke product has a strong Fatou-1-point at each point of M.

There exist Blaschke products with uncountably many strong Fatou-1-points; but their angular derivative cannot exist at more than countably many of the Fatou-1-points.

B. RODIN: A necessary and sufficient condition for the Ahlfors distortion theorem

Let f be a conformal map of $R = \{w = u+iv \in C \mid \phi_o(u) < v < \phi_1(u)\}$ onto $S = \{z = x+iy \in C \mid 0 < y < 1\}$ where the $\phi_j \in C^o(-\infty,\infty)$ and $\operatorname{Re} f(w) \to \pm\infty$ as $\operatorname{Re} w \to \pm\infty$. There are well known results giving conditions on R sufficient for the distortion property $\operatorname{Re} f(u+iv) = \int_0^u (\phi_1-\phi_o)^{-1}du + \text{const.} + o(1)$, where $o(1) \to 0$ as $u \to +\infty$.

In this talk we give a condition on R which is both necessary and sufficient for f to have this property.

St. RUSCHEWEYH: Über Funktionen mit beschränkter Randdrehung

Mit Hilfe der Banachschen "Indikatrix" wird eine scharfe allgemeine Approximationsaussage durch Treppenfunktionen für gewisse Funktionen mit beschränkter Variation hergeleitet. Diese wird sodann zu folgender Aussage aus der Funktionentheorie genutzt:

Sei $f = f_1/f_2$, wobei f_j sternförmig von der Ordnung $1 - \frac{m_j}{2}$, $m_j \in \mathbb{N}$, im Einheitskreis sind. Dann gibt es Zahlen

$|x_j| = |y_j| = 1$ und $\mu \in \mathbb{R}$, so daß

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\mu} \frac{\prod_{j=1}^{m_1-1}(1+x_j z)}{\prod_{j=1}^{m_2-1}(1+y_j z)} f(z)\right] > 0, \qquad |z| < 1.$$

Einige Konsequenzen für Abbildungseigenschaften bei speziellen Funktionenklassen der geometrischen Funktionentheorie (z.B. Funktionen mit geschränkter Randdrehung) werden anschließend diskutiert.

G. SCHMIEDER: Bemerkungen zur Approximation auf unbeschränkten Teilen Riemannscher Flächen

Eine abgeschlossene Teilmenge der nicht kompakten Riemannschen Fläche R heißt von wesentlich endlichem Geschlecht, wenn sie durch paarweise disjunkte offene Mengen von endlichem Geschlecht überdeckt werden kann.

Mit Hilfe einer Methode, die zur Konstruktion lokal schlichter Funktionen auf R mit vorgegebenem Schlichtheitsgebiet entwickelt wurde, läßt sich leicht beweisen: Ist $E \subset R$ von wesentlich endlichem Geschlecht und $P_k \in R - E$ eine Folge ohne Häufungspunkt auf R sowie in jedem P_k ein Hauptteil (in lokalen Koordinaten) gegeben, so existiert zu jedem $\delta > 0$ eine auf R meromorphe Funktion g, die genau in den P_k Pole besitzt mit den gegebenen Hauptteilen und für die gilt $|g|_E < \delta$.

Ein Analogon zum Approximationssatz von Arakeljan für Riemannsche Flächen wurde 1978 von Scheinberg bewiesen; Gauthier gab 1979 einen kürzeren Beweis unter Übertragung der bekannten Sätze von Alice Roth. Unter Verwendung des oben genannten Resultats läßt sich dieser Beweis nochmals beträchtlich kürzen.

H.S. SHAPIRO: Quadrature domains, the Friedrichs operator and planar elasticity

A "quadrature domain" is a plain domain Ω such that the area integral $\int_\Omega u\,d\sigma$ is equal to $\sum_1^n c_\nu u(z_\nu)$ for every harmonic integrable function u, where z_i are fixed points of Ω and $c_\nu \in \mathbb{C}$ (z_i, c_i independent of u). If L_a^2 denotes the Hilbert space of square-integrable analytic functions on Ω then the Friedrichs operator T of Ω is the real linear map $(Tf)(z) = (PUf)(z)$ where $(Uf)(z) = \overline{f(z)}$ and P is orthogonal projection on L_a^2 from $L^2(\Omega)$. The boundary value problems of linear elasticity in 2 dimensions can be simply formulated in terms of T. Quadrature domains can be shown to be just those for which T has finite rank.

A. SHIELDS: Cyclic vectors in the Dirichlet space

The Dirichlet space, D, consists of those functions f(z), analytic in the open unit disc Δ, for which $\iint_\Delta |f'|^2\,dx\,dy < \infty$. This space may be normed as follows: $\|f\|^2 = \sum (n+1)|\hat{f}(n)|^2$, where $\hat{f}(n)$ are the Taylor coefficients of f. A function f in D is said to be a "cyclic vector" (for the operator of multiplication by z) if the polynomial multiples of f are dense in D. Cyclic vectors must have no zeros in Δ, and in fact must be "outer functions" in the sense of Beurling. A complete characterization of cyclic vectors is unknown; Carleson has given an example of an outer function in D that is not cyclic. The following questions are open.

(1) If f, f^{-1} are both in D, must f be cyclic?

(2) If f, g are in D, g is cyclic, and $|f(z)| \geq |g(z)|$ for all z in Δ, must f be cyclic?

The second question can be answered in the affirmative in a number of special case (for example, if g is analytic in a bigger disc).

H. STEGBUCHNER: Über eine Verallgemeinerung eines Satzes von Hardy und Littlewood

Wir bezeichnen mit A die "Kreis-Algebra", das ist die Menge aller in $D = \{|z| < 1\}$ holomorphen Funktionen, welche auf $\bar{D}$ eine stetige Fortsetzung besitzen. Ferner sei für $0 < \alpha \leq 1$

$$A_\alpha = \{f \in A: |f(z_1) - f(z_2)| \leq C|z_1 - z_2|^\alpha;\ z_1, z_2 \in \bar{D}\}$$

die Menge der Lipschitzfunktionen in A.

Nach einem bekannten Satz von Hardy und Littlewood ist eine Funktion f genau dann in A_α, wenn für $|z| = r$ gilt

$$f'(z) = O((1-r)^{\alpha-1}) .$$

Dieses Ergebnis wird für allgemeinere Gebiete G und beliebiges $f \in A$ (anstelle des Lipschitzexponenten α tritt dann ein bestimmter Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$) hergeleitet.

K. STEPHENSON: Analytic functions and hypergroups of function pairs

Function hypergroups are a generalization to arbitrary analytic functions of the classical theory of Fuchsian groups as it pertains to covering maps. Given f analytic on $\mathcal{U} = \{|z| < 1\}$, one obtains a distinguished collection $\mathcal{P}_f$ of order pairs (ϕ, ψ) of analytic self maps of $\mathcal{U}$ which satisfy $f \circ \phi \equiv f \circ \psi$. The mapping properties of f are reflected in the elements and structure of $\mathcal{P}_f$. A natural product can be defined on $\mathcal{P}_f$; however, it is generally multiple-valued, so $\mathcal{P}_f$ forms what is known as a hypergroup rather than a group. A subcollection $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_f$ is a subhypergroup if and only if $\mathcal{P} = \mathcal{P}_g$ for some g analytic on $\mathcal{U}$. Moreover, in this case there is a function h analytic on the range of g so that $f \equiv h \circ g$. The theory of function hypergroups involves an interplay of analytic, geometric, and algebraic considerations. Inner functions and classical covering maps play central roles.

S. XIE-CHANG: Approximation and Expansion by Rational Functions in the Complex Plane

The main purpose of this talk is to introduce some new results of approximation and expansion by rational functions with described poles in the complex plane.

1. The best approximation by rational functions on $|z| = 1$ and $|z| < 1$.
2. The inverse theorem of the best approximation by rational functions.
3. The best approximation by rational functions in Kq domain.
4. The remainder estimate of partial sum of the expansion in the Fourier series of rational functions.

Berichterstatter: E. Mues (Hannover)

Adressen der Tagungsteilnehmer

Prof. J.M. Anderson
Department of Mathematics
University College
Gower Street

London WC1E6BT

England

Frau
Dr. Karin Faulstich
FB IV - Mathematik
der Universität Trier
Postfach 3825

5500 Trier

Prof. Dr. J. Becker
Fachbereich Mathematik / FB 3
der Technischen Universität
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin

Prof. Dr. R. Fehlmann
Mathematisches Institut
der Universität Zürich
Freie Straße 36

CH-8032 Zürich

Schweiz

Prof. Dr. H. Begehr
Fachbereich Mathematik - FB 19
der Freien Universität
Hüttenweg 9

1000 Berlin 33

Prof. Dr. F. Gackstatter
Institut für Mathematik I
der Freien Universität
Hüttenweg 9

1000 Berlin 33

Professor J. Clunie
Department of Mathematics
Imperial College
Huxley Building, Queen's Gate

London SW72BZ

England

Prof. Dr. D. Gaier
Mathematisches Institut
der Universität Gießen
Arndtstraße 2

6300 Gießen

Prof. Peter L. Duren
Department of Mathematics
University of Michigan

Ann Arbor, MI 48109

USA

Professor John Garnett
Department of Mathematics
University of California, L.A.

Los Angeles, Calif. 90024

USA

Prof. Dr. H. Epheser
Lehrgebiet Angewandte Analysis
Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

Prof. Frederick W. Gehring
Department of Mathematics
University of Michigan

Ann Arbor, MI 48104

USA

Prof. Dr. H. Grunsky
Mathematisches Institut
der Universität Würzburg
Am Hubland

8700 Würzburg

Prof. Peter W. Jones
Department of Mathematics
University of Chicago

Chicago, IL 60637

USA

Prof. Dr. K. Habetha
Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Templergraben 55

5100 Aachen

Dr. Volker Kasten
Institut für Mathematik
der Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

Professor W.K. Hayman
Department of Mathematics
Imperial College
Huxley Building, Queen's Gate

London SW72BZ

England

Prof. William E. Kirwan
Department of Mathematics
University of Maryland

College Park, MD 20742

USA

Prof. Maurice Heins
Department of Mathematics
University of Maryland

College Park, MD 20742

USA

Prof. Dr. Wolfgang Luh
FB IV - Mathematik
der Universität Trier
Postfach 3825

5500 Trier

Prof. Dr. F. Huckemann
Fachbereich Mathematik / FB 3
der Technischen Universität
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin

Prof. Dr. K. Menke
Abteilung Mathematik
der Universität Dortmund
Postfach 50 05 00

4600 Dortmund 50

Prof. Dr. K.-H. Indlekofer
Fachbereich 17 - Mathematik
der Universität - GHS - Paderborn
Warburger Straße 100, Geb. D

4790 Paderborn

Prof. Dr. Ch. Meyer
Mathematisches Institut
der Universität Bern

CH-3000 Bern

Schweiz

Prof. Dr. Erwin Mues
Institut für Mathematik
der Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

Prof. Dr. Ch. Pommerenke
Fachbereich Mathematik / FB 3
der Technischen Universität
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin

Prof. Anthony G. O'Farrell
Department of Mathematics
St. Patrick's College

Maynooth, Kildare

Ireland

Prof. Dr. L. Reich
II. Mathematisches Institut
der Universität Graz
Brandhofgasse 18

A-8010 Graz

Österreich

Prof. Kotaro Oikawa
College of General Education
University of Tokyo
32-7 Minami 2
Kichijoji, Musashino

Tokyo
Japan

Prof. Dr. M. Reimann
Mathematisches Institut
der Universität Bern

CH-3000 Bern

Schweiz

Prof. Dr. E. Peschl
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Wegelerstraße 10

5300 Bonn

Prof. Dr. Michael v.Renteln
Mathematisches Institut I
der Universität Karlsruhe
Kaiserstraße 12

7500 Karlsruhe

Prof. Dr. Albert Pfluger
Mathematisches Seminar
der ETH Zürich

CH-8006 Zürich

Schweiz

Prof. Burton Rodin
Department of Mathematics
University of California

La Jolla, CA 92037

USA

Prof. George Piranian
Department of Mathematics
University of Michigan

College Park, MI 48109

USA

Prof. Dr. St. Ruscheweyh
Mathematisches Institut
der Universität Würzburg
Am Hubland

8700 Würzburg

Dr. Gerald Schmieder
Institut für Mathematik
der Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

Prof. Dr. Kurt Strebel
Mathematisches Institut
der Universität Zürich

CH-8053 Zürich

Schweiz

Prof. Harold S. Shapiro
Mathematics Institute
Royal Institute of Technology

S-10044 Stockholm 70

Schweden

Prof. Dr. Horst Tietz
Institut für Mathematik
der Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

Prof. Allen L. Shields
Department of Mathematics
University of Michigan

Ann Arbor, MI 48109

USA

Prof. Dr. G. Weißenborn
Fachbereich Mathematik /FB 3
der Technischen Universität
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin

Prof. H. Stegbuchner
Mathematisches Institut
der Universität Salzburg

A-5020 Salzburg

Österreich

Prof. Shen Xie-Chang
Department of Mathematics
Peking University

Peking

China

Prof. Kenneth Stephenson
Department of Mathematics
University of Tennessee
Ayres Hall

Knoxville, TN 37916

USA