MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

# T a g u n g s b e r i c h t 23/1982

## Graphentheorie

30.5. bis 5.6.1982

Die Tagung fand unter Leitung von Herrn G. Ringel, Santa Cruz statt. Auf dieser Tagung wurde von 38 Teilnehmern über die neuesten Entwicklungen in der Graphentheorie berichtet, sowie anläßlich einer Problemsitzung offene Probleme andiskutiert. Eine Grobeinteilung der Vorträge umfaßt 3 Aspekte:

(i) Ergebnisse der Graphentheorie

(ii) Beziehungen zwischen Graphentheorie und reiner Mathematik

(iii) Beziehungen zwischen Graphentheorie und angewandter Mathematik.

ad(i) Es wurden Fortschritte erzielt z.B. auf folgenden Problemkreisen: Weg- und Zusammenhangsprobleme, Rekonstruktionsprobleme bei unendlichen Graphen, Einbettungsfragen, Hamiltonsche Graphen, Färbungsprobleme, charakteristische Zahlen von Graphen, Minimalbasen, Menger-Probleme

ad(ii) Zwischen Graphentheorie und verschiedenen mathematischen Theorien wurden Beziehungen aufgezeigt, so z.B.

- zwischen Evasionsspielen und Varietäten
- Klassifikation von Graphen durch Retrakte
- Ramseyprobleme in kombinatorischen Kategorien
- Halbgruppen
- Lineare Algebra und Matrizentheorie
- Zählprobleme und Tschebyscheff-Polynome
- Graphen und Gruppen

ad(iii) Es wurden Optimierungsprobleme behandelt. Dabei spielten neben Graphen vor allem Mengensysteme, Matroide, Polytope (Ellipsoid-Methode für die lineare Optimierung), Datenstrukturen eine wesentliche Rolle.

Für das Oberwolfacher Problem (Ringel, 1967) wurden wesentliche Fortschritte erzielt.

# Vortragsauszüge

## M. AIGNER

### Cops and Robber

Let $G$ be a finite undirected graph. There are two players $C$ (cop) and $R$ (robber). $C$ puts a stone on a vertex, then $R$, and then they move alternately along edges. $C$ wins if he can put his stone on top of $R$; if $R$ can prevent $C$ from doing that then $R$ wins. Let $\mathcal{C}$ be the class of cop-win graphs. The following two results were found independently by several people: 1. $\mathcal{C}$ is a variety, i.e. if $G,H \in \mathcal{C} \Rightarrow G \times H \in \mathcal{C}$, if $G \in \mathcal{C}$ and $H$ is a retract of $G$ then $H \in \mathcal{C}$. 2. Suppose $p$ is a vertex such that $p \cup N(p) \subseteq N(d)$ for some other vertex $d$ ($N(p)$ = neighbourhood of $p$), then $p$ is called a pitfall. $G \in \mathcal{C}$ if and only if $G$ can by successive removal of pitfalls be reduced to a single vertex. Let $\gamma(G)$ be the minimum number of cops needed to catch the robber in any event. 3. If $G$ is n-regular of girth $\geq 5$ then $\gamma(G) \geq N$. 4. Let $G$ be planar then $\gamma(G) \leq 3$. (Joint work with M. Fromme).

## T. ANDREAE

### The edge-reconstruction problem for infinite graphs

C. Thomassen was the first who gave examples showing that the infinite version of the edge-reconstruction conjecture is false. We improved this result by giving simpler examples showing the same. Furthermore, we proved the following. Let $G$ and $H$ be two infinite graphs that have (up to isomorphism) the same family of edge-deleted subgraphs.
Then

(1) $G$ and $H$ have the same number of components,

(2) $G$ and $H$ have the same degree-sequence,

(3) $G \cong H$ in case that $G$ is a locally finite tree containing no subdivision of the regular tree of degree three,

(4) $G \cong H$ in case that $G$ is locally finite and almost r-regular, i.e., there are at most a finite number of vertices of degree $\neq r$ (for $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$),

(5) $G \cong H$ if $G$ is a locally finite graph with a finite number of components which possesses at least two non-stable components. (A nonempty, connected graph $A$ is called stable if for each $C \in E(G)$ there exists a component $C$ of $A-e$ with $C \cong A$.).

All these results have finite analogs. Note that (5) generalizes the well-known theorem that each finite graph with more than 3 edges is edge-reconstructible if it has at least two non-trivial components.

H.J. BANDELT

Retracts of hypercubes

A hypercube is a weak cartesian power of the complete graph $K_2$, that is, the covering graph of the lattice of all finite subsets of some set. An induced subgraph $H$ of a graph $G$ is a retract of $G$ if there is an edge - preserving map $f$ from $G$ onto $H$ such that $f|_H$ is the identity map on $H$. A median graph $G$ is a connected graph such that for any three vertices $u,v$ and $w$, there exists a unique vertex $x$ which lies simultaneously on some shortest $(u,v)$-, $(v,w)$-, and $(w,u)$-paths. THEOREM: A graph is median if and only if it is the retract of some hypercube. This result suggests the following classification scheme for graphs: a variety is any class of graphs closed under the formation of restracts and (weak cartesian) products. In particular, the class of median graphs is just the variety generated by $K_2$.

A. BOUCHET

Two classical problems involved by the construction of triangular imbeddings

For a graph $G$ and an integer $m$, $G_{(m)}$ is the graph obtained by replacing each vertex $x$ of $G$ by $m$ independent vertices $x_1, x_2, \ldots, x_m$ and defining an edge $[x_i, y_j]$ iff $[x,y]$ is an edge of $G$.

Suppose that we know a triangular imbedding of $G$ into a surface $S$, determining so a simplicial complex $K$. We want to construct, if possible, a simplicial complex $\tilde{K}$ defining a triangular imbedding of $G_{(m)}$ into a surface $\tilde{S}$ with the same orientability characteristic as $S$ (thus $\tilde{S}$ is completely determined and we get a genus formula for $G_{(m)}$) .

We try to construct $\tilde{K}$ as a covering complex of $K$ with branchpoints occuring at the vertices of $K$ . This is often possible but there remain two uncompletely elucidated cases. For $m = 5$ , the construction is certainly always possible; this result would be a corollary to Tutte's conjecture about nowhere-zero 5-flows. For $m = 3$ , the construction seems to be possible apart two cases; this result, if it was proved, would be stronger than 4-color theorem.

D.E. DAYKIN/FRANKL

Extremal Problems Involving a Graph and Hypergraphs

Let $G$ be a finite loopless graph with $k$ vertices. To each vertex $i$ of $G$ associate a set $J_i$ of subsets of the set $X = \{1,2,...,n\}$ . We say the association has property I if

$$i \neq j \; ; \; F_i \in J_i \; ; \; F_j \in J_j \; , \; (i,j) \text{ is an edge of } G \Rightarrow F_i \cap F_j \neq \emptyset \; .$$

Similarly we say the association has property $U, \neq, \not<$ if the condition $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ above is replaced respectively by $F_i \cup F_j \neq X, F_i \neq F_j$, $F_i$ is not a proper subset of $F_j$ .There are 4 properties and hence 16 cases. For each case we bound both $\sum\limits_{1 \leq i \leq k} |J_i|$ and $\max\{\min\limits_{1 \leq i \leq k} |J_i|\}$ .

Examples give lower bounds and theory provides upper bounds. We have $G$ directed and undirected, two cases.
Sometimes we assume $G$ has only two vertices. Many, but not all, of the 256 problems are solved.

W. DEUBER

Recent results in Ramsey Theory

In der Ramseytheorie wurden in letzter Zeit untersucht: 1. Verallgemeinerungen des Kantenfärbungssatzes auf allgemeinere "induzierte Substrukturen" (Vektorräume, Abelsche Gruppen, Sätze von Prömel). 2. Kanonische Partitionsresultate. Insbesondere gelang eine schöne Verallgemeinerung des Gallai-Wittschen Satzes über Färbungen von endlichen Mengen in Gitterräumen auf Färbungen mit beliebig vielen Farben (Satz von Deuber, Graham, Prömel, Voigt).

G.A. DIRAC

Eine nützliche Verwendung von Graphen in der Algebra

Dies ist ein kurzer Bericht über neue Arbeit von DOV TAMARI.
Es sei B eine endliche Menge T von Elementen zusammen mit einer Abbildung aus TxT in T. Man nenne B assoziativ falls es eine Halbgruppe gibt, in welche B eingebettet werden kann. Mit Hilfe der Halbgruppe $F_{|B|}/E_B$ sieht man leicht: B ist nicht assoziativ $\Leftrightarrow \exists p,q \in T,\ p \neq q$: p kann mit Hilfe der Abbildungen von B in q übergeführt werden. Jeder solchen Oberführung von p in q entspricht eine genau definierte, schrittweise Konstruktion eines endlichen, 3-regulären Graphen in der Ebene. Ferner gibt es dann auch eine Oberführung von p in q, deren Graph außerdem noch 3-zusammenhängend ist. Somit kann die nicht-Associativität eines gegebenen B (falls vorhanden) durch systematische diesbezügliche Untersuchung der endlichen 3-regulären, 3-zusammenhängenden Graphen in der Ebene durch ein insgesamt endliches, wohldefiniertes Verfahren nachgewiesen werden.

J. DOYEN

A characterization of conference graphs

A finite graph G is said to have property $P^{\geq t}_{m,n}$ (resp. $P^{t}_{m,n}$) if, for every sequence of m+n vertices of G, there are at least t (resp. exactly t) vertices of G adjacent to the first m vertices and non adjacent to the last n vertices of the sequence.

It is known that, for any given m,n and t, almost all graphs have property $P^{\geq t}_{m,n}$.

G has property $P^{1}_{2,0}$ iff G is a friendship graph (Erdös, Renyi and Sos, 1967). G has property $P^{t}_{2,0}$ $(t \geq 2)$ iff G is a strongly regular graph with $\lambda = \mu = t$ (Bose and Shrikhande, 1970). G has property $P^{t}_{m,0}$ $(m \geq 3)$ iff $G = K_{m+t}$ (Carstens and Kruse, 1977). Theorem: There is a graph having property $P^{t}_{m,n}$ $(m,n \geq 1)$ iff $m = n = 1$; a graph G has property $P^{t}_{1,1}$ iff G is a conference graph, that is a $(4t+1,\ 2t,\ t-1,t)$ strongly regular graph.

A. FRANK

Matroid Intersections in Graph Theory

The matroid intersection problem (finding a maximum cardinality or maximum weight common independent set of two matroids) is well solved from both theoretical and algorithmical point of view.
We show a few known and less known problems in graph theory which can be formulated with the help of matroid intersections.

1. Find a minimum weight subset of arrows of a digraph to cover all the directed cuts.
2. Find a minimum weight k-strongly connected orientation of an undirected graph.
3. Extend a digraph by a minimum number of arrows so as to have $k$ arrow-disjoint paths from a source to each node.
4. When can a digraph be covered by $k$ branchings?
5. How many arrows can be covered by $k$ spanning arborescences rooted at a fixed node?

P. FRANKL

Linear algebra and hypergraphs

Using linear algebra we establish several known and some new results in extremal set theory in a simple, unified way. For example, Erdös asked the following question:
Suppose $n,t$ are positive integers, and $\mathcal{F}$ a family of subsets of the integers $\{1,2,\dots,n\}$, such that no two members of $\mathcal{F}$ have intersection of cardinality exactly $t$. What is maximum subject to these constraints?
We show that for $n > n_0(t)$ and $n+t$ odd, the best thing one can do is to take all the subsets of $\{1,\dots,n\}$ which contain at most $t-1$ or at least $(n+t+1)/2$ elements. We also solve the case $n > n_0(t), n+t$ even.

M. GRÖTSCHEL

On Weakly Acyclic Digraphs

Let $D = (V,A)$ be a digraph, and let $P_{AC}(D) \subseteq \mathbb{R}^A$ denote the convex hull of all incidence vectors of acyclic are sets $B \subseteq A$ ; i.e. $P_{AC}(D)$ is a polytope whose vertex set is in 1-1-correspondence with the arc sets of acyclic subdigraphs of $D$ . By definition, acyclic subdigraphs do not contain directed cycles. This implies that for every directed cycle $C \subseteq A$ the inequality $x(G) := \sum_{a \in C} x_a \leq |C|-1$ is valid with respect to $P_{AC}(D)$. Setting

$$P_C(D) := \{x \in \mathbb{R}^A \mid 0 \leq x_a \leq 1 \text{ for all } a \in A \text{ , } x(C) \leq |C|-1 \ \forall \text{ directed cycles } C \subseteq A\}$$

we conclude that $P_{AC}(D) \subseteq P_C(D)$ for every digraph $D$ .
We call a digraph $D$ weakly acyclic if $P_{AC}(D) = P_C(D)$ ; otherwise $D$ is called strongly cyclic. Clearly acyclic digraphs are weakly acyclic; and it follows from a result of Lucchesi and Younger that planar digraphs are weakly acyclic. We give several further classes of such digraphs.

Using the ellipsoid method and a shortest path algorithm (as separation subroutine) we can show that the weighted feedback arc set problem (resp. acyclic subgraph problem) can be solved in polynomial time for weakly acyclic digraphs. This generalizes a result of Lucchesi for planar digraphs.
A digraph $D = (V,A)$ is called minimally strongly cyclic if $D$ is strongly cyclic and $D-a$ is weakly acyclic for all $a \in A$ . We can show that for all $n \geq 6$ there are minimally strongly cyclic digraphs of order $n$ . The smallest such digraph is a particular orientation of $K_{3,3}$ .

E. GYÖRI

On subdivisions of k-connected graphs

In this lecture, I should like to present the recent results on the partitions of k-connected graphs into connected subgraphs (the vertex-set is partitioned) and on the connection between connectivity number and existence of some partitions of graphs.
L. Lovász and the present author proved that if $G$ is a k-connected graph

then for every $k$ vertices there exists a k-partition of the vertex-set of $G$ such that this partition separates these $k$ vertices, the classes of the partition contain given numbers of vertices and induce connected subgraphs of $G$. In some cases, the existence of some partitions implies the k-connectivity of the graph $G$, in the other cases sharp lower bounds can be given for the connectivity of $G$.

M. HAGER

Eine Variation des Satzes von Menger für Wege der Länge $\geq 3$

Sei $G$ ein schlichter Graph, $u,v \in V(G)$ und $S \subseteq V(G)$.
Wenn jeder u-v-Weg der Länge $\geq n$ $S$ trifft, so wird dies mit $\langle u,S,v\rangle_G^n$ abgekürzt.
L. Montejano und V. Neumann-Lara zeigten in ihrer noch nicht veröffentlichten Arbeit "A variation of Menger's theorem for long paths", folgenden Satz: Sei $n \geq 2$. Falls aus $\langle u,S,v\rangle_G^n$ $|S| \geq h$ folgt, so existieren $\{\frac{h}{3n-5}\}$ offendisjunkte u-v-Wege der Länge $\geq n$. ($\{a\}$ = kleinste ganze Zahl $\geq a$)

Wir werden Graphen mit $t$ Wegen der Länge $\geq n$ angeben, für die $|S| \geq (n-1)\cdot t$ gilt, und für den Fall $n = 3$ zeigen, daß sogar $\{\frac{h}{3}\}$ offendisjunkte u-v-Wege existieren.

H. HARBORTH

Mosaikgraphen

Mosaikgraphen sind Teilgraphen von im allgemeinen unendlichen Graphen, die planar sind, die q-regulär sind und deren Flächen nur p-Ecke sind. Nur für $(p,q)=(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)$ ergeben sich endliche Graphen, nämlich die der Platonischen Körper. Über kombinatorische Eigenschaften der Mosaikgraphen ist sehr wenig bekannt.
Es wird hier die maximale Anzahl $M(n)$ von Kanten für $n$ Knoten untersucht. Für $(3,6),(4,4),(6,3)$ ist $M(n) = n+\{\frac{1}{2}(n+\sqrt{6n})\}$, $= 2n+\{2\sqrt{n}\}$, $= 3n+\{\sqrt{12n-3}\}$, also immer $= \frac{p}{2}n+O(\sqrt{n})$. Im allgemeinen ist eine geschlossene Formel noch nicht gelungen, jedoch gilt $M(n) \approx \frac{p}{2}n+(p-2)n$, so daß die Anzahl von "Randkanten" nur bei den regulären Parkettierungen $O(\sqrt{n})$ und sonst $O(n)$ ist.

P. HEINRICH

## Die Jordansche Normalform der Adjazenzmatrix spezieller gerichteteter Graphen

Es sei $G(A)$ ein gerichteter (endlicher) Graph mit der Adjazenzmatrix $A$ .
Die Jordansche Normalform von $A$ sei $J$.
Für eine gewisse Klasse $K$ gerichteter Graphen beweist man:

1. Ist $G(A) \in K$ , so gibt es ein $G(J) \in K$ .
2. Es gibt ein (besonders einfaches) System $S$ von Struktureigenschaften, das $G(J)$ charakterisiert.
3. Ist $G(S)$ die Klasse aller Graphen, die durch $S$ charakterisiert werden, so gilt: $G(B) \in G(S)$ gdw. $B$ zu $J$ ähnlich ist.

Somit ergibt sich innerhalb $K$ eine Klasseneinteilung in "Ähnlichkeitsklassen" ; zwei Graphen gehören genau dann zur gleichen Klasse, wenn ihre Adjazenzmatrizen ähnlich sind,und $G(J)$ ist ein in gewissem Sinn besonders einfacher Repräsentant dieser Klasse.

C. HOEDE

## A Heuristic For Finding A Hamilton Cycle In A Graph

A deterministic heuristic ist presented, that is based on a renumbering procedure. In full generality the heuristic doesfind a hamilton cycle, if present, but has high complexity and is trivial. In restricted versions a Hamilton cycle need not be found. But the complexity poses some interesting questions and might be low.
The heuristic is used as an example of a deterministic algorithm that may be combined with a non-deterministic one like Posa's algorithm, thus forming a hybrid algorithm. By a simple example the potential use of hybrid algorithms is demonstrated.

H.A. JUNG

## Längste Kreise in 3-zusammenhängenden Graphen

In 2-zusammenhängenden Graphen $G$ hat man $n(C_{max}) \geq 2d_{min}$ oder $G-C_{max} = \emptyset$ ; dabei ist $C_{max}$ ein Kreis maximaler Länge $n(C_{max})$ in $G$ und $d_{min}$ der Minimalgrad von $G$. Dies ist ein wohlbekanntes Resultat von G.A. Dirac. Für längste Kreise in 3-zusammenhängen Graphen $G$ kann man zeigen: $n(C_{max}) \geq 3(d_{min}-1)$ oder $G-C_{max}$ ist kantenlos. Es werden weiter "lokale" Versionen und Möglichkeiten der Verschärfung bei stärkeren Zusammenhangsforderungen angesprochen.

T.H. KALUZA

## Zum Thema Kantenfärbung bei regulären Graphen

I. M ein Modell eines schlingenfreien, für ein $g : 2 \leq g \in \mathbb{N}$ g-regulären Graphen $G$, der Kantenfärbungen mit $g$ Farben erlaubt (: benachbarte Kanten sollen verschiedene Farben bekommen). Zwei Färbungen heißen verschieden, wenn mindestens eine Kante bei der einen anders gefärbt ist als bei der anderen. Bei einer gegebenen Färbung $F$ bedeutet TT (Tausch-Teilgraph) einen Teilgraphen, dessen Kanten man neben den durch $F$ gegebenen "Erstfarben" je eine der $g$ Farben als "Zweitfarbe" so zuordnen kann, daß bei jeder Ecke des TT die Zweitfarben eine discordante Permutation der Erstfarben bilden ("discordant" hier: Zweitfarbe ≠ Erstfarbe). Dann gilt der S a t z: Man erhält aus $F$ alle anderen Kantenfärbungen von $M$, wenn man bei allen TT die Erstfarben durch die Zweitfarben ersetzt.
Die einfachsten TT sind die zweifarbigen Kreise, und bei unendlichen Graphen die evtl. vorhandenen zweifarbigen beiderseitig unendlichen Wege, mit denen seit K e m p e ja manches erreicht wurde. Es wird für jedes $g \geq 3$ (bei $g = 2$ ist alles evident) eine Klasse von bipartiten g-regulären Graphen angegeben, bei denen man aus keiner Färbung durch bloße Benutzung von 2-farbigen TT alle anderen Färbungen gewinnen kann.
II. Die in I zuletzt erwähnten Graphen besitzen Färbungen, bei denen für je zwei Farben die Kanten mit diesen beiden Farben einen H a m i l t o n - Kreis bilden: wir nennen sie H - F ä r b u n g e n .
Für $g = 3$ nennen wir die Graphen mit H-Färbungen <u>3H-Graphen</u>; für sie gilt

der S a t z : (1) G ist genau dann ein 3H-Graph, wenn es in G drei Hamilton-Kreise gibt, die so verlaufen, daß jede Kante zu genau zweien von ihnen gehört; färbt man die Kanten eines von drei solchen Kreisen mit 2 Farben und die übrigen Kanten mit der dritten Farbe, so erhält man eine H-Färbung; (2) für $e = 2,4,6,\ldots$ gibt es 3H-Graphen - darunter auch planare - mit $e$ Ecken; (3) für $e = 2,6,10,\ldots$ gibt es auch bipartite 3H-Graphen; ausgenommen den (einzigen) mit 2 Ecken, sind sie nicht planar; (4) für $e = 4,8,\ldots$ gibt es keine bipartiten 3H-Graphen.

3H-Graphen, bei denen jede Färbung eine H-Färbung ist, nennen wir r e i n e 3H-Graphen: S a t z: (1) Für $e \leq 8$ sind alle 3H-Graphen rein (der Würfel ist daher kein 3H-Graph); (2) für $e \geq 10$ gibt es reine und nicht-reine 3H-Graphen, darunter auch planare. Das Dodekaeder ist übrigens ein reiner 3H-Graph.

III. Für $g = 3$ wird gezeigt, wie man durch einfache Prozesse, die höchstens 4 Ecken und 9 Kanten involvieren, aus dem H-gefärbten einfachsten 3H-Graphen mit 2 Ecken jeden anderen 3H-Graphen und alle seine H-Färbungen gewinnen kann.

IV. Es wird angedeutet, wie man durch einen noch einfacheren Prozeß (als den in III. genannten), den man als "farbentreue Inversion" des F r i n k schen Spaltens einer Kante bezeichnen könnte, aus dem gefärbten 3-regulären Graphen mit 2 Ecken (und 3 Kanten) alle 3-regulären kanten-3-färbbaren Graphen und alle ihre Färbungen gewinnen kann.

Näheres zu II. und III. findet man in: Kaluza, Th., Existenz-Nichtexistenz- und Aufbau-Aussagen für 3H-Graphen, Abh.d.Braunschweig. Wiss. Ges. XXXII, 1981, und zu IV. in: Kaluza, Th., Gewinnung aller endlichen 3-regulären kanten-3-färbbaren Graphen und aller ihrer Färbungen aus dem einfachsten von ihnen, Veröff. des Inst. f. Math. d. Univ. Hannover, Nr. 13o.

E. KÖHLER

Clique-reguläre Graphen mit verbotenen Kreisen

Def.: Seien $3 \leq k, \ell \in \mathbb{N} \ni \lambda$ und $G = (\dot{G}, \bar{G})$ sei ein endlicher, schlichter Graph mit $x \in \dot{G}$. Es gelte

1.) Jede Clique von G ist ein $K_k$.

2.) Jede Kante von G ist in genau einer Clique von G enthalten.

3.) Der Clique-Graph von G enthält seinen $C_i$ für $3 \leq i \leq \ell$.

Dann bedeute:

$\mathfrak{G}_k^{(\ell)}$ := {G | G erfüllt 1.), 2.) und 3.)}

$v_G$ := |G|

$b_G$ := |{Y | Y ist Clique in G}|

$\gamma(x)$ := |{Y | Y ist Clique in $G \wedge x \in Y$}|

$k_\lambda^{(\ell)} := \min \{b_G \mid G \in \mathfrak{G}_k^{(\ell)} \wedge \bigwedge_{x \in G} \gamma(x) = \lambda\}$ .

<u>Satz 1:</u> $\bigwedge_{3 \leq k \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{G \in \mathfrak{G}_k^{(5)}} \frac{v_G}{b_G} < \varepsilon$

<u>Satz 2:</u> $k_\lambda^{(4)} \leq \lambda \cdot k^{k(\lambda-1)}$

<u>Vermutung:</u> $3_3^{(4)} = 55$ .

G. KREWERAS

<u>Eine Verwandtschaft zwischen gewissen Multigraphen und den Tschebyscheff'schen Polynomen</u>

Zwei Familien von Multigraphen werden folgenderweise definiert. Die Ecken sind Paare von ganzen Zahlen $(j,k)$ , wo $j \geq 0$ und entweder $0 \leq k \leq j$ (einseitiger Fall) oder $-j \leq k \leq j$ (zweiseitiger Fall). In beiden Fällen gehen im allgemeinen bis an die Ecke $(j,k)$ $a+b+1$ Bögen , zwar einer aus der Ecke $(j-1,k-1)$ , $a$ aus der Ecke $(j-1,k)$ und $b$ aus der Ecke $(j-1,k+1)$ . Man nimmt sich vor, die Anzahl $B(j,k)$ der Wege von $(0,0)$ bis zu $(j,k)$ zu berechnen. Es kann dann folgenderweise verfahren werden. Man startet vom Tschebyscheff'schen Polynom erster Art $T_i(x)$ oder zweiter Art $V_i(x)$ , je nachdem man sich im zwei- oder einseitigen Falle befindet. Man ersetzt $x$ durch $(x-a)/2\sqrt{b}$ und bezeichnet den Koeffizient von $x^j$ mit $A(i,j)$ . Dann gilt, mit $i<k$ , folgender Satz: $\sum_{j=i}^{k} A(i,j)B(j,k) = 0$ . Verschiedene Sonderfälle ergeben wohlbekannte Zahlreihen (Catalan, Schröder, Motzkin, usw.) .

I. MENGERSEN

Minimale Ramsey-Graphen für Dreiecke

Ein Graph $G$ heißt minimaler $K_3$-Graph, wenn bei jeder 2-Färbung der Kanten von $G$ ein einfarbiger Teilgraph $K_3$ auftritt, jedoch jeder echte Teilgraph von $G$ ein 2-Färbung der Kanten ohne einfarbigen $K_3$ besitzt. Es werden einige unendliche Klassen minimaler $K_3$-Graphen angegeben.

T.D. PARSONS

Excess-Current Graphs

The use of certain current graphs with "excess currents" at some vertices can provide genus embeddings of various "composition" graphs $G[\bar{K}_n]$ , and other related graphs. This method is discussed, and is illustrated by several examples.

W. PIOTROWSKI

Bemerkungen zum Oberwolfacher Problem

Ein Graph $F$ teile einen Graphen $G$ , wenn es eine Zerlegung von $G$ in zu $F$ isomorphe Faktoren gibt. Die Frage nach den 2-regulären Teilern des vollständigen Graphen ist als "Oberwolfacher Problem" (Ringel, 1967) bekannt. Bezeichnet $C_{a_1,\dots,a_s}$ den 2-regulären Graphen bestehend aus Kreisen $C_{a_i}$ der Länge $a_i \geq 3$ , so stützen wir die

<u>Vermutung</u> $C_{a_1,\dots,a_s} \mid K_n \Leftrightarrow n = \sum\limits_{i=1}^{s} a_i \equiv 1(2),\ (a_1,\dots,a_s) \neq (4,5),(3,3,5)$

und zeigen "$\Leftarrow$" in einigen "unregelmäßigen" Fällen z.B. falls

$$a_1 \equiv 1(2),\ a_i \equiv 0(2) \quad \text{für} \quad i \geq 2,\ a_1 \geq 9\text{-}4s + 2\sum_{i=2}^{s} a_i \ ,\ n \equiv 1(4)$$

oder

$$n \equiv 7(12),\ a_i \geq 24,\ 48s < n$$

erfüllt ist durch Bestimmung der Teiler gewisser Hilfsgraphen.
Als Nebenergebnis charakterisieren wir die Teiler $C_{a_1,\dots,a_s}$ des $K_{n,n}$ außer in den Fällen mit $n \equiv 2(4)$ bei denen zusätzlich die Anzahl der $a_i \equiv 2(4) > 2[\frac{n}{8}]$ ist.

R. RADO

Monochromatic subgraphs in edge-coloured complete graphs

Given an arbitrary edge-colouring of a complete graph, one can ask the question: how large a monochromatic complete subgraph can alway be found? Attempts at answering such questions form the subject matter of the partition calculus. The lecture will deal with some results of this general nature.

G. RINGEL

Die Spaltungszahl der vollständigen paaren Graphen

Wenn man aus einem Graphen $H$ einen neuen Graphen $G$ konstruiert, indem man zwei nicht benachbarte Ecken identifiziert, so nennen wir diese Operation eine Ecken-Identifizierung. Die Umkehrung heißt Ecken-Spaltung. Es sei $S$ eine geschlossene Fläche. Die Spaltungszahl (splitting number) $sp_S(G)$ eines Graphen $G$ bezüglich $S$ ist die kleinste Zahl von Ecken-Spaltungen, die nötig sind, um $G$ in einen in $S$ einbettbaren Graphen zu transformieren. Für den vollständigen paaren Graphen $K_{m,n}$ wird $sp_S(K_{m,n})$ genau bestimmt. Wenn $S$ die Ebene und $G$ der vollständige Graph $K_m$ ist, so ist die Spaltungszahl bekannt für $m \leq 32$ und für mindestens eine Restklasse $m$ (mod 3). Diese Ergebnisse sind erzielt worden in Zusammenarbeit mit B. Jackson.

I. RIVAL

A classification of reflexive graphs

A graph variety is a class $V$ of graphs which contains all direct products of members of $V$ and which contains all retracts of members of $V$. In this way we hope to achieve a classification scheme:Order the graph varieties by inclusion. This approach has been used recently by E.-M. Tawhari, R.T. Nowakowski, M. Pouzet, and I. Rival, especially for those graphs which have a loop at each vertex-reflexive graphs.

Y. RODITTY

$3K_2$-Decomposition of a Graph

A graph $G = G(V,E)$ is said to have an H-decomposition if it is the union of edge-disjoint isomorphic copies of the graph $H$.
The following two conditions for $G = G(V,E)$ to have a $3K_2$-decomposition are obviously necessary:
(1) $|E| = 3k$
(2) $\deg v \leq k \; , \forall v \in V(G)$ .
It is proved that the necessary conditions are also sufficient excluding a list of 26 graphs.

V. RÖDL

Some problems concerning the chromatic number

P. Erdös and A. Hajnal asked the following question:
Does there exist a constant $\varepsilon > 0$ with the following property? If every subgraph $H$ of a graph $G$ can be made bipartite by omission of at most $\varepsilon|H|$ edges (here by $|H|$ the number of vertices of $H$ is denoted), then $\chi(H) \leq 3$ .
The aim of our lecture is to give a negative answer to this question and deal with the similar problem for hypergraphs. The first was done also by L. Lovâsz who used a different example.

M. SCHMIDT

Unendliche lokalendliche hypohamiltonsche Graphen

Ein unendlicher Graph $G$ heißt hamiltonsch, wenn er einen zweiseitig unendlichen Weg besitzt, der alle Ecken von $G$ enthält. $G$ ist hypohamiltonsch, wenn $G$ nicht hamiltonsch, aber $G-v$ für jede Ecke $v \in G$ hamiltonsch ist. $G$ ist lokalendlich, wenn jede Ecke endlichen Grad hat. Thomassen untersuchte unendliche hypohamiltonsche Graphen und stellte dabei die Frage nach der Existenz lokalendlicher solcher Graphen. Ich beantworte diese Frage positiv.

R. SCHMIDT

Kantenrekonstruktion unendlicher, Weg-endlicher Graphen

Satz: Jeder Weg-endliche Graph mit unendlicher Kantenmenge ist stark Kanten-rekonstruierbar.

Beweisidee: Jeder Weg-endliche Graph $G$ hat eine Ordnung $o(G) \in \text{Ord}$, die eindeutig bestimmt ist, und damit zusammenhängend einen eindeutig bestimmten endlichen Untergraphen, den Kern Ker $G$ von $G$. Es ist Ker $G$ = Ker $(G-k)$ für fast alle $k \in K(G)$ . (+)

$G$ und $H$ heißen schwach Kanten-hypomorph, $G \stackrel{\iota}{\sim} H$, wenn sie dieselben Isomorphie-Klassen von Kanten-verminderten Teilgraphen haben.
$G$ heißt stark Kanten-rekonstruierbar, wenn $G \stackrel{\iota}{\sim} H$ impliziert, daß $G \simeq H$ .
Mit Hilfe von (+) zeigen wir, daß aus $G \stackrel{\iota}{\sim} G$, $G \not\simeq H$ eine weitere Eigenschaft folgt, von der wir durch transfinite Induktion nach der Ordnung nachweisen, daß sie nie gilt.

T. SCHÖNHEIM

On amenable graphs

The concepts of amenably k-colorable and k-amenable graphs are introduced. Many cofinal classes of such graphs are determined using constructions of Dirac and Hajos.
Two other properties of amenable graphs are shown to be preserved by Dirac's construction, namely the "indifferency" of vertices and the "unconstrainedness" of edges.
The amenable colorability of bipartite graphs is completely described.
Many 4-critical graphs are studied.
One of the applications of such graphs is the reduction of k-criticality of hypergraphs to graphs (TOFT) and a similar reduction of k-colorability.

A. SCHRIJVER

On the number of eulerian orientations of undirected graphs

Let $G$ be a loopless undirected $2k$-regular graph with $n$ vertices. Let $\varepsilon(G)$ be the number of eulerian orientations of $G$. Then

$$(2^{-k}\binom{2k}{k})^n \leq \varepsilon(G) \leq \sqrt{\binom{2k}{k}}^n ,$$

and there ground numbers are best possible, as functions of $k$. We comment on the relations with similar bounds for the number of 1-factors and of 1-factorizations in bipartite graphs.

T. TUCKER

Imbeddings of Cayley Graphs

For a finite group $A$, let $g(A)$ be the minimum genus over all Cayley graphs for $A$ and let $s(A)$ (respectively, $s^o(A)$) be the minimum genus over all surfaces on which $A$ acts (resp., on which $A$ acts preserving orientation). Burnside, Maschke, and others studied $s^o(A)$ while White introduces $g(A)$ in 1972. The theme of this talk is the relationship between $g(A)$ and $s(A)$. The following topics are discussed: the inequality $g(A)$ $s(A)$, Proulx's theorem that if $g(A)$ is 1 then so is $s(A)$ with three exceptions, Hurwitz-type theorems relating $g(A)$ and $s(A)$ to the order and structure of $A$, the only group of genus 2, computation of $g$ and $s$ for the symmetric and alternating groups, inequalities for subgroups and quotient groups, Babai's conjecture that there are only a finite number of transitive graphs of a given genus greater than 2.

P.D. VESTERGAARD

An application of graph theory in land surveying

Land surveyors keep data files which list plots of land together with coordinates to points on the boundary, these boundary points are repeated for adjacent plots. This redundancy can be avoided by having an algorithm generate the facebounding circuits of a finite, planar, 2-fold connected graph without loops and without multiple edges.

The question is raised of characterizing those graphs which are expressible as a union of distinct circuits such that each edge is mentioned twice.

K. WAGNER

Der Satz von Kuratowski und eine ähnliche Fragestellung

Auf der Graphentheorietagung 1979 in Oberwolfach wurde von Ringel die Frage gestellt, ob die 1-planaren Graphen mittels bestimmter Graphen ähnlich charakterisiert werden können wie die planaren Graphen nach dem Satz von Kuratowski durch den $K_5$ und $K_{3,3}$. Diese Frage wird näher untersucht.

M.E. WATKINS

Strip-These

Ein zusammenhängender unendlicher Graph heißt Strip (Streifen), wenn er einen zusammenhängenden Untergraph $C$ (mit Rand $dC$) enthält und einen Automorphismus $f$ hat, so daß $0 < |dC| < \infty$, $f[C \cup dC] \subseteq C$, und $C \setminus f[C]$ endlich ist. Einige Eigenschaften von Strips und ihren Automorphismengruppen werden vorgestellt. Auch werden hinreichende Bedingungen dafür gegeben, daß ein zusammenhängender unendlicher Graph ein strip ist. So ein Graph ist genau dann Strip, wenn er lokalfinit ist und einen Automorphismus besitzt mit endlich vielen Orbits. (Gemeinsame Arbeit mit H.A.Jung)

P. WINKLER

Existence of graphs with a given set of r-neighborhoods

The problem of whether there exists a graph satisfying a particular set of local constraints can often be reduced to a finite set of questions of the following sort: given an finite set $\Phi$ of finite rooted graphs, is there a graph $G$ such that the set of r-neighborhoods of vertices of $G$ is precisely $\Phi$ ?

We show that this kind of question, though in general recursively unsolvable, becomes solvable when a bound is imposed on the lengths of cycles in $G$. The result continues to be true when $G$ is allowed (or required) to be infinite, or connected, or both; in fact in many of the infinite cases the

cycle restriction can be dropped.
The finite case is used to demonstrate the solvability of a problem in hypergraph theory involving degree-sets of k-trees.

T. ZAMFIRESCU

Shortness Exponents for k-gonal Polytopes modulo $n$

We give lower bounds for the shortness exponents of the families of polytopes in $R^3$ the faces of which are k-gones (mod $n$). This will be done for many, but not all pairs $(k,n)$. The case (0,2) is open, since Barnette's conjecture is open. The case (0,5), connected with a solved conjecture of Malkevitch, is settled.

## Probleme

A. BOUCHET

Let $G$ be a graph which can be triangularly imbedded in a surface $S$. Let $G_{(m)}$ be the graph obtained by replacing each vertex $x$ of $G$ by $m$ vertices $x_1, x_2, \ldots, x_m$ and defining an edge $[x_i, y_j]$ if and only if $[x,y]$ is an edge of $G$. We want to construct a triangular imbedding of $G_{(m)}$ in a surface $\tilde{S}$ with the same orientability characteristic as $S$.

Conjecture. If $m=3$ then the construction is possible except for a finite number of cases.

Remarks. - The construction is always possible for a prime $m > 5$. The validity of Tutte's conjecture about nowhere-zero 5 flows will imply the construction for $m=5$. If $G$ is 4-chromatic and distinct of $K_4$ then the construction is possible for $m=3$.

H. HARBORTH

Fußballtabellen (score sequences)

Im vollständigen Graphen $K_n$ mit Doppelkanten sei jede Kante mit Zahlenpaaren (a,b), $a,b \in \{0,1,2\}$, $a+b=2$, bewertet. Daraus erhält jeder Knoten $S_i$ $(i=1,1,\ldots,n)$ die Bewertung $s_i$ als Summe aller Zahlen a bzw. b, die von $S_i$ auf seinen Kanten zuerst erreicht werden. Die möglichen Folgen der $s_i$ mit $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$ bilden etwa die Pluspunkte einer Fußballtabelle am Ende einer Saison (score sequence). Welches ist die Anzahl A(n) aller verschiedenen Tabellenbilder? Man bestimme jedenfalls die Größenordnung von A(n). Für $n \leq 20$ ist A(n) bekannt, so gilt für die deutsche Bundesliga A(18) = 2 698 732 882 975 782 .

C. HOEDE

Sei S eine trennende Eckenmenge eines zusammenhängenden Graphen. Wenn der induzierte Graph <S< zusammenhängend ist, für alle trennende Mengen, so heißt der Graph ZAM-Graph (Zusammenhängende ArtikulationsMengen).
Es wird gefragt ZAM-Graphen zu charakterisieren.
Bemerkungen: ZAM-Graphen haben Diameter 2.
Das Problem hat zu tun mit der starken Vermutung von Berge.

G. KREWERAS

Question: in how many ways can a given circuit digraph be considered as the product of two circuit digraphs?
Product: $(S,A)\cdot(S,B) = (S,C)$, C such that $(x,y) \in C \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists z/(x,z) \in A$ and $(z,y) \in B$ . Obvious answer if the number n of vertices is even: in no way.

Conjectured answer if $n = 2p+1$:

in $\frac{(2p)!}{p+1}$ ways.

(True for $p = 1,2,3,4$).

G. RINGEL

Dies ist ein Problem, erwähnt in Ringel's erstem Buch (1959) über Färbungsprobleme. In der Ebene sei eine endliche Menge von Kreisen gegeben, so daß keine drei Kreise sich im selben Punkt berühren (sie dürfen z.B. einen Punkt gemeinsam haben). Man bestimme die kleinste Zahl $k$ von Farben derart, daß in jeder dieser Konfigurationen die Kreise mit $k$ Farben gefärbt werden können, wobei je zwei sich berührende Kreise verschiedene Farben erhalten. Man weiß, daß $k \geq 5$. Aber es ist nicht bekannt, ob $k$ endlich ist bzw. existiert.

Berichterstatter: W. Deuber

## Liste der Tagungsteilnehmer

AIGNER, Martin
II. Math. Inst.
Freie Universität Berlin
Königin-Luise-Str. 24-26
1000 Berlin 33

ANDREAE, Thomas
II. Math. Inst.
Freie Universität Berlin
Königin-Luise-Str. 24-26
1000 Berlin 33

BANDELT, Hans-J.
Universität Oldenburg -FB 6-
2900 Oldenburg

BODENDIEK, Rainer
PH Kiel
Olshausenstr. 75
2300 Kiel 1

BOUCHET, André
Département de Mathématiques
Université du Maine
F - 72017 Le Mans Cedex, France

DAYKIN, D.E.
The University of Reading
Dept. of Mathematics
Reading GB RG2 7AG

DEUBER, Walter
Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Universitätsstr. 1
4800 Bielefeld 1

DIRAC, G.A.
Mathematisk Institut
Ny Munkegade
DK 8000 Aarhuse, Dänemark

DOYEN, J.
Department of Mathematics
Campus Plaine CP 216
University of Brussels
Boulevard du Triomphe
B - 1050 Brussels, BELGIUM

FRANK, András
Research Institute for Telecommunication
Budapect, Gábor A.u.65, HUNGARY, H1o25

FRANKL, P.
17. Passage de lIndustrie
F - 75010 Paris

GRÖTSCHEL, Martin
Institut für Operations Research
Universität Bonn
Nassestr. 2
5300 Bonn 1

GYŐRI, Erwin

Mathematical Institute of the Hungarian
Academy of Sciences
Realtanoda n. 13-15

H - 1053 Budapest Hungary

Herrn
Prof. Dr. R. Henn
Institut für Statistik und Mathematische
Wirtschaftstheorie - Universität -

7500 Karlsruhe 1

HAGER, Michael
Techn. Universität Berlin
FB Mathematik
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin 12

HOEDE, Cornelis
Dept. of Applied Mathematics
Twente University of Technology
P.O. Box 217

7500 AE Enschede, Niederlande

HALIN, Rudolf

Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

JUNG, H.A.
Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin 12

HAMIDOUNE, Yahya O.

ER Combinatoire (M)
54 Bd Raspail

F - 75006 Paris, France

KALUZA, Theo

Nötelweg 4

3000 Hannover 91

HARBORTH, Heiko
Bienroder Weg 47

3300 Braunschweig

KÖHLER, Egmont
Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

HARZHEIM, Egbert

Universität Düsseldorf, Math. Institut
Universitätsstr. 1

4000 Düsseldorf 1

KREWERAS, G.

40 rue Lacepode

75005 Paris France

HEINRICH, Peter
Ulmer Landstr. 289a

8901 Stadtbergen b. Augsburg

MENGERSEN, I.

Werrastr. 17

3300 Braunschweig

MEYER, Bernd
Olendörp 15

2000 Hamburg 13

PARSONS, T.D.
Mathematics Department
Pennsylvania State University
University Park, PA 168o2 USA

PIOTROWSKI, Wolf

II. Math. Institut
Königin-Luise-Str. 2o-26

1000 Berlin 33

RADO, Richard
Department of Mathematics
The University of Reading

Reading /Great Britain RG2 7AG

RINGEL, G.

University of California
Dept. of Mathematics

Santa Cruz, Cal. USA

RIVAL, Ivan
Department of Mathematics and Statisti.
The University of Calgary

Calgary , Alberta T2N 1N4 Canada

RODITTY, Lehuda

School of Mathematics

Tel-Aviv University

Tel-Aviv ISRAEL

RÖDL, V.
FJFI - CVUT
katedra matematiky
Husova 5

Praha 1

SCHMIDT-STEUP
Universität Dortmund
Abt. Mathematik

4600 Dortmund 50

SCHMIDT, Rüdiger
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

SCHÖNHEIM, Tochanan
School of Mathematics
Tel-Aviv University

Tel-Aviv ISRAEL

SCHRIJVER, Alexander
Instituut voor Actuariaaten Econometrie, Universiteit van Amsterdam
Jodesbreestraat 23

1011 - NH Amsterdam, Holland

SCHUMACHER, Heinz

PH Kiel
Olshausenstr. 75

2300 Kiel 1

SEIFTER, Norbert
Institut für Angew. Mathem.
MU-LEOBEN
Franz Josef Str. 18

A - 8700 Leoben

STEFFENS, Karsten
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

WAGNER, Klaus
Wodanstr. 57

5000 Köln 91

TOFT, Bjarne
Mathematisk Institut, Odense Universitet

DK - 5230 Odense M , Dänemark

WATKINS, Mark
Dept. of Mathematics
Syraeuse University

Syracuse, NY 13210 USA

TUCKER, Tom
Mathematics Department
Colgate University

Hamilton N.Y. 13346 USA

WINKLER, Peter
Dept. of Math. + Computer Sci.
Emory U.

Atlanta, GA 30322 USA

VESTERGAARD, P.D.
Matematisk Institut, Aalborg
Universitetscenter
Postboks 159

DK - 9100 Aalborg Dänemark

ZAMFIRESCU, Tudor
Universität Dortmund
Abt. Mathematik

4600 Dortmund