MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 3/1983

Deskriptive Mengenlehre
16.1. bis 22.1.1983

Die Tagung unter der Leitung von Herrn E.-J. Thiele (Berlin) war neuen Ergebnissen der Deskriptiven Mengenlehre gewidmet. Zur Einstimmung, besonders der deutschen Teilnehmer, wurde ein Kompaktkurs über analytische Mengen an den Anfang gestellt.

Die zufällige Begegnung mit den "Anwendbaren Algebraikern" erwies sich als interessant und attraktiv, zumal sie den Forschungsinteressen einer Reihe unserer Tagungsteilnehmer entgegen kam. Jeder Tag wurde mit einem für beide Tagungen gemeinsamen Vortrag begonnen. Die entsprechenden Auszüge unserer Tagung sind im folgenden mit einem Stern (*) gekennzeichnet. Von den Teilnehmern der Paralleltagung hielten die Herren Lenstra, Lüneburg und Strassen gemeinsame Vorträge für beide Tagungen. Auch der, zunächst zur besseren Tafelausnutzung, in die Mittagspause gelegte Vortrag entwickelte sich meistens zu einem gemeinsamen.

Dem Mathematischen Forschungszentrum ist für seine vorzügliche Betreuung zu danken, die die mit der gleichzeitigen Durchführung zweier Tagungen verbundenen organisatorischen Probleme gar nicht erst zu Problemen werden ließ. Den Leitern der Paralleltagung, den Herren Beth und Lüneburg, sei an dieser Stelle nochmals für die in jeder Hinsicht erfreuliche und reibungslose Zusammenarbeit vor und während der Tagung gedankt.

Vortragsauszüge

L. BUKOWSKÝ:

A universal function for partial continuous functions

The properties of the universal continuous function for the continuous functions with G_δ-domain in the Baire space are investigated. It is shown that a great deal of the results from the general theory of algorithms can be similarily obtained for the continuous case. E. g. for any continuous function, the set of its codes contains a perfect subset, or, two universal functions with the Kleene's S-property differ up to continuous functions: $V_\varepsilon = V_{f(\varepsilon)}$.

C. DELLACHERIE:

Capacities and capacitary operators (*)

Starting with the Newtonian capacity, we explain a Choquet's capacity and prove the capacitability theorem. We give a few examples of applications in analysis. After that, we look at "capacitary operators" which are to the capacities what a kernel is to the measures in measure theory and give some applications of their notion to the study of balayage theory.

W. FELSCHER:

How to keep winning in spite of liberalization as long as law and order are respected

Let P_0 and P_1 be players with sets X_0, X_1 of statements such that
1) every $x \in X_i$ determines a finite set $A(x) \subseteq X_{1-i}$ (attacks upon x)
2) every $x \in X_i$ determines a finite set $D(x) \subseteq X_{1-i}$ (defenses against the attack x). A game is a sequence δ of statements such that $\delta(n) \in X_{i(n)}$, $i(n) \equiv n \pmod 2$ and such that every $\delta(n)$, $n > 0$, is, in a unique way, determined as either an attack upon an earlier statement of the other player or as a defense against an earlier attack of the other player. A k-liberal game satisfies the rules

(d_0) P_0 may answer an attack only once.

(d_{1k}) P_1 may answer an attack only k times.

(d_{2k}) P_1 may attack a statement only k times.

(d_3) If there are several open (i. e. unanswered) attacks by P_{1-i}, then P_i may answer only the latest of them.

An illiberal game is a 1-liberal game in which, moreover, P_1 may react only upon the immediately preceding statement of P_0. A game is won by P_0 if it is finite and ends with an even position after which P_1 cannot continue.
Theorem: If P_0 has a strategy to win illiberal games, then this strategy can be extended to a strategy for k-liberal games.

M. HOLZ:

Unendliche Spiele und Deskriptive Mengenlehre (*)

Nach Definition der grundlegenden Begriffe, wie projektive Menge, Determiniertheit eines unendlichen Zwei-Personen-Spiels um eine Menge $A \subseteq X^{\omega}$, werden einige klassische Resultate zitiert. Mit Hilfe einiger Ergebnisse in L und der Forcing-Methode werden die Grenzen von ZFC zur Erweiterung der klassischen Theoreme aufgezeigt, und es wird geschildert, wie im Gegensatz hierzu Determiniertheits-axiome eine im wesentlichen vollständige Strukturtheorie für die projektiven Mengen liefern. Als Beispiel für die Beweisbarkeit von Determiniertheitsaussagen in ZFC wird die Determiniertheit offener bzw. abgeschlossener Spiele bewiesen.

Borelspiele

Ist X ein topologischer Raum, so wird die Klasse der Borel-Mengen von X wie üblich definiert. Nach einem kurzen Überblick über die Ergebnisse vor 1975, insbesondere unter Hinweis auf den Satz von Wolfe (1955), der besagt, daß F_σ-Spiele determiniert sind, wird der Satz von D. A. Martin (1975): "Alle Borelspiele sind determiniert" für die Borel-Mengen von endlichem Rang bewiesen.

I. JUHASZ:

Independence results in topology (*)

The aim of the lecture was to illustrate the fact that many simple and natural problems concerning topological spaces cannot be decided in usual set theory (i. e. ZFC). To this end the history and the main developments in

1) the normal Moore space problem and
2) the S- and L-space problem

were sketched.

P. KOEPKE:

The Consistency Strength of $Fr_\omega(\omega_\omega,\omega)$

$Fr_\mu(\kappa,\lambda)$ is the property: every structure of cardinality $\geq\kappa$ with $\leq\mu$ functions possesses a free subset of cardinality $\geq\lambda$. We prove:

Theorem: $\mathrm{Cons}(ZFC + Fr_\omega(\omega_\omega,\omega)) \Leftrightarrow \mathrm{Cons}(ZFC + \text{there is a measurable cardinal})$

The proof consists of three parts:

1) If κ is minimal with $Fr_\omega(\kappa,\omega)$, then $\forall\mu<\kappa\, Fr_\mu(\kappa,\omega)$.
2) If $Fr_\omega(\omega_\omega,\omega)$ holds, then ω_ω is measurable in an inner model. This part uses the Dodd-Jensen Covering Theorem for the core model.
3) Let κ be measurable. Let G be Prikry-generic for κ with corresponding Prikry sequence $\kappa_0,\kappa_1,\ldots$ In V[G], let P be the product of Levy collapses making κ_0 to ω_2, κ_1 to ω_4, ... , and κ to ω_ω. If H is P-generic over V[G], then $V[G,H] \models Fr_\omega(\omega_\omega,\omega)$.

A. LOUVEAU:

Effectivity in Capacity Theory

We present the effective analog of the capacitability theorem of Choquet, through some trick which relies on an application of the effective Gale-Stewart Theorem about infinite closed games.

M. M. RICHTER:

Effective Descriptive Set Theory

It is reported about some results in the effective projective hierarchy. The basic theorems which are of interest are: Number uniformization theorem, function uniformization theorem, reduction theorem, and separation theorem for the various classes. The tools are norms and scales; their use for the uniformization theorems is discussed. The existence of norms is proved using Δ^1_1-determinateness. The proofs follow work of Kechris, Moschovakis et al.

R. L. SAMI:

On the topological version of Vaught's conjecture

Vaught's conjecture (that a sentence of $L_{\omega_1\omega}$ has countably many or $2^{\aleph_0}$ isomorphism types of countable models) is known to follow from the following conjecture in descriptive set theory:

(+) If $J: G \times S \longrightarrow S$ is a continuous action of a Polish topological group G on a Polish space S, then there are either countably many or perfectly many orbits (that is: there is a perfect set $P \subseteq S$, no two distinct members of which share the same orbit).

A few cases of (+) are known, notably that where G is locally compact. Given G, S, J as above, let $U \subseteq S$ be an invariant analytic subset:

Theorem 1: If G is abelian, then U has either countable many or perfectly many orbits.

Theorem 2: Suppose S is recursively presented and for all $x \in U$, the orbit of x is $\underset{\sim}{\Pi}^0_{\omega_1^x}$, then U has countable many or perfectly many orbits.

Theorem 1 generalises a theorem of Makkai in model theory.

K. STEFFENS:

Zwei Anwendungen unendlicher Spiele

Aufgrund der Determiniertheit abgeschlossener Mengen sind Anwendungen auf analytische Mengen möglich; denn jede analytische Menge ist bekanntlich die Projektion einer abgeschlossenen Menge. Ein Beweis des bekannten Satzes, daß jede analytische Teilmenge von ω^ω die Baire-Eigenschaft hat, diente als Beleg dieser Auffassung. Ferner wurde folgender Satz bewiesen:

Sind $A, B \subseteq 2^\omega$ mit $A, B \in \Sigma^0_n - \Pi^0_n$ $(n \geq 3)$, so existiert ein F_σ-Borelisomorphismus $\phi | 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ mit $\phi[A] = B$.

$MC \Rightarrow Det(\Pi^1_1)$

Obiger Satz besagt, daß unter der Annahme der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl bewiesen werden kann, daß jedes Spiel um eine Π^1_1-Menge determiniert ist. Dieser Satz von D. A. Martin wurde vorgestellt und durch Einführung eines normalen Maßes und unter Verwendung eines Partitionstheorems von Rowbottom bewiesen.

H. VOGEL:

Stetige Funktionale und projektive Bäume

Es sei X ein topologischer Raum, $0 \in X$ fixiert und

$$sp(X) := \sup\{|T_f| : f : X \longrightarrow \omega \text{ stetig}\},$$

wobei $|T_f|$ die ordinale Länge des fundierten Baumes $T_f \subseteq X^{<\omega}$ ist, der definiert wird durch

$$\langle x_0, \ldots, x_{i-1} \rangle \in T_f :\Leftrightarrow \forall j \leq i \ f(\langle x_0, \ldots, x_j, 0, \ldots, 0, \ldots \rangle) > i .$$

Ist X Objekt einer "natürlichen", kartesisch abgeschlossenen, topologischen Kategorie, z. B. der der Konvergenzräume nach Urysohn und Fréchet, so gilt für $X_1 := \omega^\omega$, $X_{n+1} := \omega^{X_n}$ der Satz von Norman:

$$sp(X_{n+1}) = \underset{\sim}{\pi}^1_n := \sup\{|T| : T \text{ Baum über } \omega^\omega \text{ und } T \in \underset{\sim}{\Pi}^1_n\}$$

Diese topologische Charakterisierung der projektiven Ordinalzahlen hat ihren Grund letztlich darin, daß in jedem X_{n+1} eine abzählbare, dichte Teilmenge B_{n+1} "endlicher" Punkte liegt, so daß die konvergenten Folgen aus B_{n+1} eine $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$-vollständige Menge Coff(n+1) bilden. Die Elemente von X_n sind nämlich die aus der Beweis- und Rekursionstheorie wohlbekannten stetigen (oder abzählbaren) Funktionale endlichen (reinen) Typs. Die $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$-Vollständigkeit von Coff(n+1) zeigt man mit Hilfe der Darstellung

$$\alpha \in A \Leftrightarrow \forall g \in X_n \exists p\, R(\alpha, g, p)$$

mit "einfachem" R für jede projektive Menge A aus $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$. Der Übergang von X_n zu B_n führt zu einer stetigen Reduktion Φ mit

$$A = \Phi^{-1}(\mathrm{Coff}(n+1)).$$

P. ZBIERSKI:

Solution of a problem of Sierpinski (on invariant extensions of measures)

Let m be a measure defined on a σ-field of subsets of the n-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$. We say that m is invariant, if it is invariant w. r. t. all isometric mappings of $\mathbb{R}^n$. W. Sierpinski, in 1936, asked if there is a maximally invariant measure, that is a measure, which is invariant but has no proper invariant extensions. K. Ciesielski has recently proved the negative answer for this problem and we present his very simple proof. In fact, it is a proof of some more general problem of Harašvily.

Berichterstatter: G. Siemering

Tagungsteilnehmer

L. Bukovský
Katedra matematickej analýzy
PF UPJŠ
Februárového vít. 9
04154 KOŠICE
CSSR

I. Juhasz
MTA MK I
H-1053 Budapest
Reáltanoda u. 13 - 15
Ungarn

Claude Dellacherie
Université de Rouen
BP 67
F-76130 Mt St Aignon
Frankreich

Peter Koepke
Mathematical Institute
St Giles
Oxford
England

H.-D. Ebbinghaus
Abt. f. math. Logik
Albertstr. 23b
7800 Freiburg

A. Louveau
Université de Paris
Att. Rech. CNRS
92 rue du Dessous des Berges
F-75013 Paris

Walter Felscher
Alte Steige 10
7407 Rottenburg 13 - Obernau

Gert Müller
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
6900 Heidelberg

Klaus Gloede
Math. Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
6900 Heidelberg

Klaus Potthoff
Abt. Logik
Philos. Seminar d. Universität
Haus S 12a
Ohlshausenstr. 40
2300 Kiel

Michael Holz
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1
3000 Hannover 1

Michael M. Richter
Lehrstuhl für Angewandte
Mathematik insbes. Informatik
RWTH
Templergraben 65
5100 Aachen

Ramez Labib Sami
Dept. of Mathematics
Faculty of Science
Cairo University

Cairo

Ägypten

Ernst-Jochen Thiele

Breisgauer Str. 30

1000 Berlin 38

Britta Schinzel
Lehrstuhl Informatik I
Büchel 29 - 31

5100 Aachen

Helmut Vogel
Institut für Informatik
der TUM
Postfach 202420

8000 München 2

Gerd Siemering

Dragonerstr. 16

3000 Hannover 1

Kurt Wolfsdorf

Wilhelmstr. 2

1000 Berlin 61

Karsten Steffens
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

Paweł Zbierski
Institute of Math. U. W.
PKIN IXp.

PL-00901 Warschau

Polen