Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

T a g u n g s b e r i c h t 8/1983

Funktionentheorie

13. 2. bis 19. 2. 1983

Die Tagung fand unter der Leitung von Herrn E. Mues (Hannover), Herrn K. Strebel (Zürich) und Herrn Ch. Pommerenke (Berlin) statt. Die Beschränkung auf 41 Teilnehmer, davon 19 aus dem Ausland, konnte dem großen Interesse an dieser Tagung nicht gerecht werden.

Themenschwerpunkte dieser Tagung waren "Werteverteilung meromorpher Funktionen" und "Riemannsche Flächen". Eine große Zahl von Vorträgen über neueste Ergebnisse aus den beiden Gebieten regte fruchtbare Diskussionen an.

Vortragsauszüge

L. V. Ahlfors: Möbius transformations and Clifford numbers

I shall use the original Clifford algebra C_n generated by the "imaginary units" $i_1,\dots,i_{n-1}$ subject to $i_h i_k = -i_k i_h$ for $h \neq k$ and $i_h^2 = -1$. Every $a \in C_n$ can be written in the form

$$a = a_o + a_1 i_1 + \dots + a_{n-1} i_{n-1} + \sum_{h<k} a_{hk} i_h i_k + \dots + a_{1\dots(n-1)} i_1 \dots i_{n-1} .$$

C_n is a vector space of dimension 2^{n-1}. The "vectors" $x = x_o + x_1 i_1 + \dots + x_{n-1} i_{n-1}$ form the vector subspace V^n which may be identified with $\mathbb{R}^n$.

There are three basic conjugations: $a \to a'$ is obtained by replacing each i_h by $-i_h$, $a \to a^*$ is obtained by reversing the order in each product $i_{v_1} \ldots i_{v_p}$, $v_1 < v_2 < \ldots < v_p$. They combine to the involution $a \to \bar{a} = a'^*$.

For vectors, $x = x^*$ and $x' = \bar{x}$. Moreover, $x\bar{x} = x_0^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = |x|^2$ in the usual notation. Observe that $(a\,b)' = a'b'$ while $(a\,b)^* = b^*a^*$ and $(a\,b)^- = \bar{b}\,\bar{a}$.

Vectors $x \neq 0$ are invertible with $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$. The same is true for an a which can be written as products of vectors $\neq 0$. They form the Clifford multiplicative group Γ_n.

My interest was aroused by a paper of Th. Vahlen from 1903. He considers matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ with $a,b,c,d \in \Gamma_n \cup \{0\}$ which act on $x \in V^n$ according to the rule

$$gx = (ax+b)(cx+d)^{-1} .$$

When does this make sense, and when does g induce a surjective mapping $\bar{V}^n \to \bar{V}^n$ where $\bar{V}^n = V^n \cup \{\infty\}$. Answer: It is necessary and sufficient that ac^{-1}, bd^{-1}, $a^{-1}b$, $c^{-1}d \in V^n$ and $\Delta = ad^* - bc^* \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

A. Baernstein: Coefficients of Bloch functions

This is a report on work by my student, José Fernandez. Suppose $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is a Bloch function. Anderson, Clunie and Pommerenke conjectured that if $|f'(z)|(1-|z|) \to 0$ whenever $|f(z)| \to \infty$ then $a_n \to 0$. Fernandez shows this is false by constructing an $f \in \mathcal{B}$ such that f^2 is also in $\mathcal{B}$, but $\overline{\lim}|a_n| > 0$. The proof is based on a boundary approximation result which is likely of independent interest.

I. N. Baker: Convergence of iterated exponentials

Define $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $T_a(z) = e^{az}$, a constant in $\mathbb{C}$, $b_{n+1} = T_a(b_n)$ so that $b_n = T_a^n(1)$ where T_a^n is the n-th iterate of T_a.

The convergence of (b_n) is described fairly completely by the

Theorem 1: If $a \in \{a: a = te^{-t}$ where $|t| < 1$ or t = a root of unity$\} = K$ then (b_n) converges. For almost all t with $|t| = 1$, $a = te^{-t}$ gives rise to a divergent (b_n). For all other $a \in \mathbb{C}$, except for a countable set the sequence (b_n) diverges.

Theorem 2: If $a = te^{-t} \in \overset{\circ}{K}$ then $b_n \to e^t$ and for any open neighbourhood U of e^t there is a neighbourhood V of a such that if $a_n \in V$, $n = 1,2,\dots,$ then $T_{a_1} \circ T_{a_2} \circ \dots \circ T_{a_n}(1)$ converges to a limit in U.

Theorem 3: There is a region D_p in the a-plane tangent to K at $a = \eta e^{-\eta}$ where η is a primitive p-th root of unity such that as a passes from K to D_p at a the sequence (b_n) splits into p convergent subsequences (b_{mp+k}), $0 \le k < p$, $m \in \mathbb{N}$, each with a different limit.

L. Brickman: Extreme points and support points of the class S

Let S be the usual set of normalized univalent functions on the unit disk, and let f be any support point of S. If a (half-closed) subarc is removed from the finite end of the arc omitted by f, if G is the conformal map of the unit disk onto the resulting region (with $G(0) = 0$, $G'(0) > 0$), and if $g(z) = G(z)/G'(0)$, then g is an "exposed point" of S. This means that g uniquely maximizes over S the real part of some continuous linear functional. In particular g is an extreme point of the closed convex hull of S .

J. G. Clunie: <u>On a problem of Korenblum</u>

The Riesz-Herglotz formula for a function $g(z) = u + iv$ with $g(0) = 0$ can be expressed as

$$* \qquad g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ze^{-it}\mu(t)}{(1-ze^{-it})^2}\,dt \quad (|z|<1)$$

where $\mu(t)$ is real-valued and of bounded variation. In 1976, Hayman and Korenblum gave necessary and sufficient conditions for $g(z)$ to have a representation $*$ with $\mu(t)$ measurable and bounded. They showed also that if $k(r)\uparrow$ in $(0,1)$ and

$$u(re^{i\theta}) \le k(r) \quad (0 \le r < 1)$$

and $\int_0^1 \sqrt{\frac{k(r)}{1-r}}\,dr < \infty$ then $g(z)$ has such a representation $*$ and this is best possible. Earlier (1975), Korenblum raised the problem of finding the right two-sided condition on $u(re^{i\theta})$ in analogy with the preceding result.

Rippon has shown that if

$$** \qquad |u(re^{i\theta})| \le k(r)$$

and $\int_0^1 k(r)\,dr < \infty$, then $g(z)$ has a representation $*$ as above and this is best possible for functions $k(r)$ such that $(1-r)k(r)\downarrow$. This suggests that in the two-sided condition $\int_0^1 k(r)\,dr$ plays the same role as $\int_0^1 \sqrt{\frac{k(r)}{1-r}}\,dr$ in the one-sided condition. However, I show this is not the case by showing that there are $k(r)\uparrow$ with $\int_0^1 k(r)\,dr = \infty$ such that if $**$ is satisfied then $g(z)$ has a representation $*$ as above. The proof uses a result of Besicovitch (1963) and a result of Erdös and Kövari (1957) together with some standard function theory techniques.

Remark: The above result should appear in a joint paper with Rippon.

A. Douady: Polynomial associated to a polynomial-like mapping

A polynomial-like mapping is a proper holomorphic mapping: $f: U' \to U$ where U and U' are open sets in $\mathbb{C}$ isomorphic to a disk, $U' \subset U$. Set $K_f = \cap f^{-n}(U')$. For such a map, one can find a quasi-conformal embedding $\varphi: U \to \mathbb{C}$ and a polynomial P such that $P = \varphi \circ f \circ \varphi'$, and $\bar\partial\varphi = 0$ on K_f. If K_f is connected, P is unique up to affine conjugacy. Now let f depend analytically on a parameter λ. Can one choose P depending continuously on λ? The answer is Yes in degree 2, No in degree 3. This is joint work with J. H. Hubbard.

D. Drasin: Proof of F. Nevanlinna's conjecture

In 1929, F. Nevanlinna conjectured that if f is meromorphic in the plane of order $\lambda < \infty$, with $\Sigma\delta(a,f) = 2$, then $\lambda = 1, 3/2, 2, ...$ and each nonzero $\delta(a,f)$ is an integral multiple of $1/\lambda$. I have proved this conjecture, and will discuss some of the methods needed. In particular, we will study how the Schwarzian derivative $\{f,z\} = (f''/f')' - \frac{1}{2}(f''/f)^2$ behaves under quasi-conformal modification.

C. Earle: Families of Open Riemann surfaces

The finite dimensional Teichmüller spaces play a fundamental role in classifying families of closed Riemann surfaces and in fact can be characterized by their properties as classifying spaces. In joint work, Earle and Robert S. Fowler have introduced a new class of families of open Riemann surfaces, for which the infinite dimensional Teichmüller spaces are classifying spaces. These families have special local trivializations whose properties are described in this talk.

W. Harvey: Moduli of Riemann surfaces; some Arithmetic aspects

Using a set of moduli for compact surfaces of genus $g \geq 2$ which arise from certain Kleinian group structures, we can give criteria under which there is a model for the surfaces over a p-adic field which degenerates completely over the residue class fields into a "rational" stable curve. Thus, one can construct classical Schottky groups that are p-adic Schottky groups in Mumford's sense for some (finite) set of primes $p > 2$.

W. K. Hayman: Waring's Problem for analytic functions

Let P, R, E, M denote respectively the classes of nonconstant polynomials, rational functions, entire functions and meromorphic functions in the plane. Waring's problem asks for the representation of a function $f(z)$ in one of these classes as a sum of k'th powers

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z)^k$$

where the $f_j(z)$ belong to the same class. It turns out that in each case it is sufficient to consider the case $f(z) = z$. For in the general case we may replace $f_j(z)$ by $f_j(f(z))$ for the classes P,R,E with a slightly modified argument for M.

Basic results due to Cartan, Newman & Slater and others will be given. The related problem of the representation of 1 will also be considered. Thus the equation

$$f^k + g^k = h^k$$

has a nontrivial solution in P and R if and only if $k \leq 2$ and in E and M if and only if $k \leq 3$.

G. Jank: Weierstraßprodukte

Sei z_n eine Folge komplexer Zahlen, mit $z_n \to \infty$ und $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$, und $n(r,0)$ die Anzahl dieser Punkte in $|z| \leq r$. In einer gemeinsamen Arbeit mit L. Volkmann wird folgendes gezeigt.

Für das Weierstraßprodukt $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(p_n, \frac{z}{z_n})$, $p_n = [\log n(r_n, 0)] - 1$ gilt die Abschätzung

$$\log\log M(r,P) \leq \int_0^{3r} \frac{\log^+ n(t,o)}{t} dt + c .$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung werden Aussagen über die iterierten Ordnungen eines derartigen Produktes gemacht. Außerdem wird damit ein Satz von Nevanlinna ($K(\lambda)$-Satz) auf meromorphe Funktionen von unendlicher Ordnung verallgemeinert.

Mit anderen Produkten und einer anderen Beweismethode werden noch Aussagen über einen "iterierten Typ" im Zusammenhang mit dem Nullstellentyp gemacht.

H. Köditz: Konforme und quasikonforme Einbettungen Riemannscher Flächen

Eine holomorphe und injektive (konforme) Abbildung $f: X \to Y$ der Riemannschen Fläche (RFl.) X in die RFl. Y heißt Einbettung von X in Y. Ist X eine kompakte RFl. vom Geschlecht $g > 1$ und $G \subset X$ ein (anal. ber.) einfach zusammenhängendes Teilgebiet von X, so sei (nach K. Oikawa):

$$P(X,G) := \{Y \in T_g(X) : \exists f : X \to Y \text{ quasi-konform, } f|_{X\setminus G} \text{ konform}\} .$$

($T_g(X)$ = Teichmüllerraum). Es gilt:

Satz: Ist (G_n), $\bar{G}_n \subset G_{n+1}$ eine Folge von Teilgebieten o. g. Art von X mit meas $\bigcap (X\setminus G_n) = 0$, so folgt:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} P(X,G_n) = T_g(X) .$$

Als Beispiele werden ein Interpolationssatz für schlichte Funktionen und eine Möglichkeit der Darstellung kompakter RFlen. durch Randidentifikationen im Einheitskreis genannt.

I. Laine: Meromorphic solutions of $f'' + A(z)f = 0$, where $A(z)$ is meromorphic

This lecture presents some results of a joint work with Steven Bank (Urbana) concerning the complex differential equations

(1) $f'' + A(z)f = 0$, $A(z)$ transcendental entire,

(2) $f'' + A(z)f = 0$, $A(z)$ nonconstant periodic entire, of period $\omega \neq 0$,

(3) $f'' + A(z)f = 0$, $A(z)$ meromorphic,

mostly in the whole complex plane. For (1), we refer to Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982). For (2), we consider solutions f such that the exponent of convergence $\lambda(f)$ of their zero-sequence is finite. It appears that $f(z)$ and $f(z+2\omega)$ are linearly dependent. This implies very precise representation theorems for such solutions. Concerning (3), we are able to give characterizations for such $A(z)$ that (3) admits a fundamental set of meromorphic solutions. This appears, e. g., if and only if $2A(z) = S(g)$ is the Schwarzian derivative of a meromorphic function g such that all poles of g are of odd multiplicity and all zeros of g' are of even multiplicity.

A. Marden: On the ends of trajectories

We presented the following result, emphasizing the example of the n-punctured sphere, $n \geq 4$. It is joint work with K. Strebel.

Theorem: Let R be an arbitrary Riemann surface (covered by the unit disk $\mathbb{H}$) and φdz^2 a quadratic differential of finite norm $\iint_R |\varphi| dxdy < \infty$.

(a) If α is a geodesic ray of φ , and α^* is a lift of α to $\mathbb{H}$, then α^* has an end point on $\partial\mathbb{H}$.

(b) If α_1 and α_2 are two geodesic rays of φ with a common origin O , and α_1^* , α_2^* are their lifts from a point $O^* \in \mathbb{H}$ over O , then α_1^* , α_2^* have distinct end points on $\partial\mathbb{H}$.

H. H. Martens: A theorem of de Franchis

M. de Franchis showed in 1913 that the number of holomorphic mappings of a closed Riemann surface onto another of genus at least 2 is finite, and that only finitely many target surfaces can occur.

Recent work has shown that the number of possible maps and target surfaces can be bounded by a constant depending only on the genera of the surfaces involved, but many interesting problems remain unsettled.

Ch. A. Meyer: Ein Fortsetzungssatz für quasikonforme Deformationen

Eine quasikonforme Deformation ist eine stetige Funktion $v(v : \mathbb{C} \to \mathbb{C})$, welche der Bedingung

$$\sup\left\{ \left| \frac{\langle a, v(z+a)-v(z)\rangle}{|a|^2} - \frac{\langle b, v(z+b)-v(z)\rangle}{|b|^2} \right| : a,b,z \in \mathbb{C}, |a|=|b| \neq 0 \right\} < \infty$$

genügt.

Für zusammenhängende und abgeschlossene $M(\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C})$ wird eine Charakterisierung der Klasse

$$\left\{ v|_M : v \text{ ist eine quasikonforme Deformation} \right\}$$

durch eine Approximationseigenschaft gegeben. Die approximierenden Funktionen sind von der Form $z \mapsto az+b$ $(a,b,z \in \mathbb{C})$.

G. P. Meyer: Inversion von Exponentialpolynomen in der Nähe von transzendent kritischen Stellen

Exponentialpolynome sind Funktionen mit der Darstellung

$$f(z) := P_o(z)e^{a_o z^s} + \ldots + P_n(z)e^{a_n z^s} \qquad (n \in \mathbb{N}) \quad ,$$

wobei $0 \neq P_k(z) \in \mathbb{C}[z]$, $a_k \in \mathbb{C}$, $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$, $s \in \mathbb{N}$.

Wir stellen eine konstruktive Methode vor zur Gewinnung analytischer Darstellungen für die inverse Funktion von $f(z)$ in (gewundenen) Umgebungen von transzendent kritischen Stellen. Die Riemannschen Flächen, auf denen naturgemäß die Umgebungen zu nehmen sind, werden von gewissen Exponentialmonomen vom Typ $c \cdot \exp(az^s)$ erzeugt. Der Exponent a kann mit Hilfe des Pólya'schen Indikatordiagramms (= konvexe Hülle von $\{\bar{a}_o,\ldots,\bar{a}_n\}$) bestimmt werden. Die Zahl c ist der höchste Koeffizient eines gewissen Polynoms.

Es wird hier (an Stelle einer Größe vom Typ $(w-a)^{1/k}$ bei der wohlbekannten Puiseux-Entwicklung bei algebraischen Funktionen) eine neue Größe vom Typ $(\lg w)^{1/s}$ eingeführt, die man (in Analogie zur klassischen Situation) als "lokale Ortsuniformisierende" für die betrachtete transzendente Singularität der inversen Funktion bezeichnen kann.

J. Miles: <u>Some examples of the dependence of the Nevanlinna deficiency upon the choice of origin</u>

We consider two examples of entire functions f for which the Nevanlinna deficiency $d(0,f(z))$ of 0 depends on the choice of the origin. The first is a function of infinite order for which $d(0,f(z)) = 0$ and $d(0,f(z+a)) = 1$ for all $a \neq 0$, The second is a function of finite order for which $d(0,f(z)) = 0$ and $d(0,f(z+a)) \geq \varepsilon > 0$ for all $a \neq 0$. These examples complement earlier examples given by Hayman for entire functions and

Goldberg for meromorphic functions.

J. Nikolaus: Abbildungseigenschaften spezieller Mittag-Leffler-Funktionen

Gegeben seien die ganzen Funktionen $E_q(z^p)$ mit $p,q \in \mathbb{N}$,

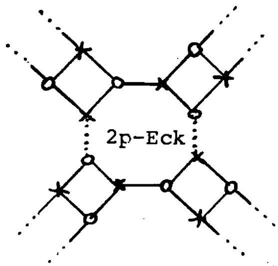
$E_q(z) := \frac{1}{q}\left\{e^{\sqrt[q]{z}} + e^{\varepsilon\sqrt[q]{z}} + \ldots + e^{\varepsilon^{q-1}\cdot\sqrt[q]{z}}\right\}$ = Mittag-Leffler-Funktion,

$\varepsilon := e^{\frac{2\pi i}{q}}$. Die symmetrischen Exponentialsummen

$e_q(z) := \frac{1}{q}\left\{e^z + \ldots + e^{\varepsilon^{q-1}\cdot z}\right\}$ besitzen ihre Nullstellen z_n

nur auf den Strahlen $s_k := \{z = re^{i\frac{\pi}{q}(2k+1)} \mid r \geq 0\}$ mit $k = 0,\ldots,q-1$,

und es gilt: $|z_n| = (\frac{\pi}{2} + k\pi)\cdot\sin\frac{\pi}{q} + \sigma(1)$ für $n \to \infty$. Es werden Fundamentalgebiete von $e_q(z)$ angegeben, deren Ränder Parallelen zu den Strahlen s_k als Asymptoten haben. Daraus ergeben sich dann die Streckenkomplexe. Die Übertragung dieser Nullstellen, Fundamentalgebiete und Streckenkomplexe auf die Funktionen $E_q(z^p)$ erhält man durch die Abbildung $z^{q/p}$.



Streckenkomplex von $E_q(z^p)$

Die Funktionen $E_q(z^p)$ sind Lösungen von Differentialgleichungen

$$q^q z^{q-1} w^{(q)} + a_{q-1} z^{q-2} w^{(q-1)} + \ldots + a_1 w' - p^q z^{p-1} w = 0 \quad \text{mit} \quad a_j \in \mathbb{Z}.$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Die Funktionen $F(z) := P_1(z)E_{q_1}(Q_1(z))+\ldots+P_m(z)E_{q_m}(Q_m(z))$ mit $q_j \in \mathbb{N}$ und $P_j(z)$, $Q_j(z)$ = Polynome sind Lösungen von Differentialgleichungen

$$a_n(z)w^{(n)} + \ldots + a_1(z)w' + a_o(z)w = 0 \quad \text{mit} \quad a_j(z) = \text{Polynome.}$$

Daraus ergeben sich Werteverteilungseigenschaften der Funktionen $F(z)$.

E. Peschl: <u>Die konforme Abbildung von Kreisbogenpolygongebieten einer besonderen Klasse, bei denen sich das Problem der akzessorischen Parameter lösen läßt</u>

Ein altes ungelöstes Problem in der Theorie der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygongebieten ist das Problem der akzessorischen Parameter, welches besagt, daß bei einer solchen Abbildung mit mehr als drei Ecken die Bestimmung der auftretenden Konstanten (- abgesehen von vielleicht einigen Symmetrien -) bisher nicht gelöst werden konnte.

Es wird im folgenden gezeigt, daß für jedes Kreisbogenpolygon mit beliebig vielen Ecken, welches aus lauter Stücken von geodätischen Linien der sphärischen $(\varepsilon=+1)$, bzw. der hyperbolischen $(\varepsilon=-1)$ Geometrie der w-Ebene zusammengesetzt ist, dieses Problem generell lösbar ist. Wir legen als Bogenelement $ds^{(\varepsilon)} = \frac{|dw|}{1+\varepsilon w\bar{w}}$ zugrunde (für $\varepsilon=-1$ in $w\bar{w} < 1$), wobei die metrischen Bewegungen die Gestalt haben: $\omega = \eta\frac{w-a}{1+\varepsilon\bar{a}w}$, $|\eta| = 1$; für die Randkrümmung eines beliebigen Bildgebietes ergibt sich:
$k = \frac{1+\varepsilon w\bar{w}}{|w'z|}\cdot Ru$ mit $u = \frac{w''}{w'}z + 1 - \varepsilon\cdot\frac{2\bar{w}}{1+\varepsilon w\bar{w}}\cdot w'z$. Die Differentialinvariante u genügt der linearen homogenen Differentialgleichung

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$\underset{(w)}{\delta_2} u + 2\varepsilon u = 0 \quad \text{mit} \quad \underset{(w)}{\delta_2} u = (1+\varepsilon w\bar{w})^2 u_{w\bar{w}} \quad .$$

Wegen des linear homogenen Charakters dieser Differentialgleichung gibt es für die Lösung u eine Erzeugende $g(w) = (w'z)_{z=z(w)}$, so daß gilt

$$u = -\frac{2\varepsilon\bar{w}}{1+\varepsilon w\bar{w}} g(w) + \frac{d}{dw} g(w) \quad .$$

Liegt die Ecke mit dem Innenwinkel $\alpha\pi$ in $w_o = 0$, so hat man für das zugehörige ("tangierende") Zweieck:

$$z = z(w) = \frac{w^{1/\alpha}-1}{w^{1/\alpha}+1} = \operatorname{tgh}(\zeta) = \operatorname{tgh}\left(\frac{1}{2\alpha}\lg w\right) \quad \text{mit der}$$

rechnerischen Hilfsvariablen $\zeta = \frac{1}{2\alpha}\lg w$, und

$$g(w) = (w'z)_{z=z(w)} = \alpha w \sinh\left(\frac{1}{\alpha}\lg w\right) : (= \hat{g}_o(w)) \quad ,$$

somit:

$$u = -\frac{2\varepsilon\bar{w}}{1+\varepsilon w\bar{w}} \alpha w \sinh\left(\frac{1}{\alpha}\lg w\right) + \alpha \sinh\left(\frac{1}{\alpha}\lg w\right) + \cosh\left(\frac{1}{\alpha}\lg w\right) \quad .$$

Bei allgemeiner Lage der Ecke in w_ν berechnen wir zunächst das Transformationsverhalten der Erzeugenden bei einem Automorphismus der ε-Metrik: Wenn $\tilde{\omega} = L_\nu(w) = \mu_\nu \frac{w-w_\nu}{1+\bar{w}_\nu w}$, $|\mu_\nu| = 1$, dann gilt das folgende allgemeine Transformationsgesetz für Erzeugende:

$$g_\nu(w) = (\hat{g}_o(\tilde{\omega}))_{\tilde{\omega}=L_\nu(w)} \cdot \frac{\overline{\mu_\nu}(1+\varepsilon w\bar{w}_\nu)^2}{1+\varepsilon w_\nu \bar{w}_\nu} \quad .$$

(Diese Formel erhält man, indem man in die transformierte Differentialgleichung einsetzt und auf den Faktor von $\bar{w}$ achtet.) Daher haben wir als transformierte Erzeugende:

$$g_\nu(w) = (\hat{g}_o(\tilde{\omega}))_{\tilde{\omega}=L_\nu(w)} \cdot \frac{\bar{\mu}_\nu(1+\varepsilon w\bar{w}_\nu)^2}{1+\varepsilon w_\nu \bar{w}_\nu} \quad \text{und somit:}$$

$$u_\nu = -\frac{2\varepsilon\bar{w}}{1+\varepsilon w\bar{w}} g_\nu(w) + \frac{d}{dw} g_\nu(w) \quad .$$

Wegen des linear homogenen Charakters der Differentialgleichung für u erhalten wir durch Zusammenfügen der lokalen Lösungen die Erzeugende

$$G(w) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(w) = \sum_{\nu=1}^{n} (\hat{g}_0(\omega))_{\omega=L_\nu(w)} \cdot \frac{\bar{\mu}_\nu(1+\varepsilon w\bar{w}_\nu)^2}{1+\varepsilon w_\nu \bar{w}_\nu}$$

für die Gesamtlösung

$$U = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu = -\frac{2\varepsilon\bar{w}}{1+\varepsilon w\bar{w}} G(w) + \frac{d}{dw} G(w) \quad \text{mit} \quad G(w) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(w) \quad .$$

Die nächste Aufgabe besteht nun darin, aus der gefundenen Differentialinvariante U die Abbildungsfunktion $w = f(z)$, bzw. ihre Umkehrfunktion $z = z(w)$ zu berechnen.

Aus $U = -\frac{2\varepsilon\bar{w}}{1+\varepsilon w\bar{w}} G(w) + \frac{d}{dw} G(w)$ ergibt sich:

$$U_{\bar{w}} = -\frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon w\bar{w})^2} G(w) \quad ,$$

$$G(w) = -\frac{1}{2\varepsilon}(1+\varepsilon w\bar{w})^2 U_{\bar{w}} = (w'z)_{z=z(w)} = \frac{dw}{d\,\lg z} \quad ,$$

$$\frac{d\,\lg z}{dw} = \frac{1}{G(w)} \quad , \quad \lg z = \int \frac{dw}{G(w)} \quad , \quad z = \exp \int \frac{dw}{G(w)} \quad .$$

Literatur:

(1) Bauer, K. W. und Peschl, E.: Ein allgemeiner Entwicklungssatz für die Lösungen der Differentialgleichung $(1+\varepsilon w\bar{w})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1)w = 0$ in der Nähe isolierter Singularitäten. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 8. 10. 1965.

(2) Peschl, E.: Beiträge zu ungelösten Problemen der konformen Abbildungen. Vortrag, gehalten auf der Tagung über Funktionentheorie, 17. 2. - 23. 2. 1980, im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach. Tagungsbericht 8 (1980), 13. - 15. (Hierin einige Druckfehler).

E. Reich: On the variational principle of Gerstenhaber and Rauch

Let $\mathcal{F}$ be a familiy of qc (quasiconformal) mappings, $w=f(z)$, of S_1 onto S_2. Let $\mathcal{P}$ be a family of weight functions $\rho(w)$ on S_2 with total mass 1. To the family $\mathcal{F}$ there corresponds the extremal dilatation $K^* = \inf\{K[f] : f \in \mathcal{F}\}$. According to the heuristically established principle of Gerstenhaber and Rauch, one expects that

$$\text{(G-R)} \qquad \sup_{\rho\in\mathcal{P}} \inf_{f\in\mathcal{F}} \iint_{S_1} (|f_z|^2 + |f_{\bar z}|^2)\, \rho(f(z))\,dx\,dy = \frac{1}{2}\left(K^*_{\mathcal{F}} + \frac{1}{K^*_{\mathcal{F}}}\right).$$

We prove (with the help of an observation of R. Fehlmann) that (G-R) holds for the case when $\mathcal{F}$ is the class of qc self-maps of the disk with specified boundary values. For the above class $\mathcal{F}$, we consider also the related family of harmonic qc maps in $\mathcal{F}$, in connection with the question of whether a harmonic qc mapping f_o can have the property that $K[f_o] = K^*_{\mathcal{F}}$.

G. Schmieder: Neue Ergebnisse zur Approximation auf abgeschlossenen Teilen offener Riemannscher Flächen

Es wird eine Klasse abgeschlossener Teilmengen nicht kompakter Riemannscher Flächen vorgestellt, für die sich Approximationsaussagen herleiten lassen analog dem Satz von Arakelyan bzw. dem Approximationssatz von A. Roth im ebenen Fall. Diese Klasse ("Mengen von schwach unendlichem Geschlecht") enthält alle Mengen von "wesentlich endlichem Geschlecht" (essentially-of-finite-genus-sets), für die diese Resultate bekannt sind, aber darüber hinaus auch Mengen mit zusammenhängendem Inneren von unendlichem Geschlecht. Die Definition der genannten Klasse macht Gebrauch von Eigenschaften bestimmter Cauchy-Kerne, deren Vorliegen von der holomorphen Struktur der Fläche abhängt; bzgl. einer geeigneten Konkretisierung der Riemannschen Fläche geht die definierende Bedingung in eine geometrische Eigenschaft über.

D. F. Shea: On the set where a δ-subharmonic function is large

Let $u = u_1 - u_2$ be delta-subharmonic and of finite order λ in the plane, e. g. $u(z) = \log|f(z)|$ for f meromorphic. Put $A(r) = \inf_{|z|=r} u(z)$. We seek lower bounds for $C(u) = \limsup \frac{A(r)}{T(r)}$ and $\sigma(u,\alpha) = \limsup \operatorname{meas}\{\theta : u(re^{i\theta}) > \alpha T(r)\}$ in terms of λ and $\nu = 1 - \delta(\infty)$. We can summarize the known results for $C(u)$ by the inequality $C(u) \geq K(\lambda,\nu)$, where the sharp bound K is given by:

(1) $K = \pi\lambda(\cos\pi\lambda - \nu)/\sin\pi\lambda$ for $0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$ and $\nu < \cos\pi\lambda$ (Goldberg, 1960);

(2) $K = -\pi\lambda(\nu\sin\pi\lambda - \sqrt{1-\nu^2}\cos\pi\lambda)$ for $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ and $\nu \leq \sin\pi\lambda$ (Edrei and Fuchs, Essén and Shea, 1973);

(3) $K = -\pi\lambda$ for $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$ and $\nu > \sin\pi\lambda$ (Petrenko, Evgravov, 1970).

Petrenko's work yields $K(\lambda,\nu) \geq -\pi\lambda$ for $\frac{1}{2} < \lambda < \infty$, but this bound is not usually sharp.

These results leave open the case $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$, $\nu \geq \cos\pi\lambda$. Using a new convolution inequality between $A(r)$ and $T(r)$, we prove (joint work with Essén and Rossi) in this case that the bound in (2) remains valid.

A corresponding new bound for $\sigma(u,\alpha)$ is also obtained, when $\lambda < 1$ and $\alpha < 0$.

N. Suita: Capacities and kernel functions

Let Ω be an open Riemann surfaces $\notin O_G$ and let $c_\beta(z)$ be the capacity of Ω . Many years ago I proved an identity

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\log c_\beta(z) = K(z,z) \ ,$$

where $K(z,\zeta)$ is the Bergman kernel of Ω , by making use of uniformization and conjectured that the curvature of the metric $ds_\beta = c_\beta(z)|dz| \leq -4$.

In this talk I shall give a simple proof of the identity and show results supporting the conjecture.

S. Toppila: The spherical derivative

Let f be a meromorphic function in the complex plane. We denote by $\rho(f(z))$ the spherical derivative of f and by $\mu(r,f)$ the maximum of $\rho(f(z))$ on $|z| = r$. We use the usual notations of the Nevanlinna theory. The following result holds.

Theorem 1: For any d, $0 < d \leq 1$, and t, $0 \leq t < \infty$, there exists a transcendental meromorphic function of order t such that $\delta(\infty,f) = d$ and that

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r\mu(r,f)}{T(r,f)} \leq 60(1+t)\delta(\infty,f) \ .$$

This theorem shows that an earlier result of J. Winkler and the speaker is essentially sharp.

J. Williamson: The real zeros of successive derivatives of a meromorphic function

Hellerstein, J. Williamson, and L. C. Shen have settled some conjectures of Pólya by finding the explicit forms of all entire functions f such that f, f', and f'' have only real zeros.

We raise the new question of characterizing the functions f meromorphic in the plane such that f, f', and f'' have only real zeros and poles. The above authors have settled this question for meromorphic functions which are not constant multiples of a real (i. e. real on the real axis) function, for reciprocals of entire functions, and for functions whose first derivatives are zero free. If f is a real, non-rational, non-entire meromorphic function with f, f', f'' having only real zeros, we conjecture that either $f(z) = A\,\mathrm{Tan}(az+b)$ or $f(z) = A[\mathrm{Tan}(az+b) - (az+b)]$; A, a and b real constants.

J. Winkler: On the construction of entire functions with assigned zeros and ones

Nevanlinna mentioned in some lecture to the honour of Weierstraß the problem to construct entire functions with exactly assigned zeros and ones and he pointed out that there is known no method to approach a solution of this problem. In todays lecture it was shown by results of Ozawa and the speaker that it is reasonable to modify the problem in the following direction:
Let be given some sequence (a_n) and a sequence of small point sets D_n . Can there be chosen from each D_n some point b_n such that the a_n and b_n are all the zeros and ones with at most a finite number of exceptions of some entire function? In the lecture it is shown, that it is possible to give positive answers to this modified problem.

Berichterstatter: G. Frank (Dortmund)

Tagungsteilnehmer

Prof. Dr. L. Ahlfors
160 Commonwealth Avenue

Boston, MA 02116

U. S. A.

Prof. Dr. A. Baernstein
Dept. of Mathematics
Washington University

St. Louis, MO 63130

U. S. A.

Prof.Dr. I. N. Baker
Imperial College
Dept. of Mathematics

London SW7 5HH

Großbritannien

Prof. Dr. J. Becker
Technische Universität
Fachbereich Mathematik FB 3
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin

Prof. Dr. L. Brickman
Mathematisches Institut
Universität Würzburg
Am Hubland

8700 Würzburg

Prof. Dr. J. Clunie
The Open University
Faculty of Mathematics

Milton Keynes MK7 6AA

Großbritannien

Dr. D. Daase
Technische Universität
Fachbereich Mathematik
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin

Prof. Dr. A. Douady
Université Paris Sud, Orsay
Dept. Math.

Paris

Frankreich

Prof. Dr. D. Drasin
Dept. of Mathematics
Purdue University

West Lafayette, IN 47907

U. S. A.

Prof. Dr. C. Earle
Cornell University
White Hall

Ithaca, NY 13853

U. S. A.

Prof. Dr. G. Frank
Abteilung Mathematik
Universität Dortmund
Postfach 50 05 00

4600 Dortmund 50

Prof. Dr. H. Grunsky
Mathematisches Institut
Universität Würzburg
Am Hubland

8700 Würzburg

Prof. Dr. W. J. Harvey
Dept. of Mathematics
King's College

Strand, London (WC2R2LS)

Großbritannien

Prof. Dr. W. K. Hayman
Dept. of Mathematics
Imperial College

London SW7 5HH

Großbritannien

Prof. Dr. A. Marden
Dept. of Mathematics
University of Minnesota

Minneapolis 55455

U. S. A.

Dr. G. Hennekemper
Abteilung Mathematik
Universität Dortmund
Postfach 50 05 00

4600 Dortmund 50

Prof. Dr. H. H. Martens
University of Trondheim
NTH, Math. Institut

Trondheim

Norwegen

Prof. Dr. F. Huckemann
Technische Universität
Fachbereich Mathematik FB 3
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin

Dr. Ch. Meyer
Institut für Mathematik
Universität Bern

CH-3000 Bern

Prof. Dr. G. Jank
Lehrstuhl II für Mathematik
Universität Aachen
Templergraben 55

5100 Aachen

Dr. G. Meyer
Rechenzentrum Uni Regensburg
Universitätsstr. 31
Postfach

8400 Regensburg

Dr. O. Knab
Mathematisches Institut
Universität Karlsruhe

7500 Karlsruhe

Prof. Dr. J. B. Miles
University of Illinois
1409 West Green

Urbana, IL 61801

U. S. A.

Dr. H. Köditz
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

Prof. Dr. E. Mues
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

Prof. Dr. I. Laine
University of Joensuu
P. O. Box 111

SF-80101 Joensuu 10

Finnland

Prof. Dr. J. Nikolaus
Lehrstuhl f. Mathematik VI
Universität Siegen
Hölderlinstr. 3

5900 Siegen 21

Prof. Dr. D. Peschl
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Wegelerstr. 10

5300 Bonn

Dr. N. Steinmetz
Universität Karlsruhe
Institut für Mathematik
Englerstr. 2

7500 Karlsruhe

Prof. Dr. A. Pfluger
ETH Zürich
Mathematik ETH-Zentrum

CH-8092 Zürich

Prof. Dr. K. Strebel
Mathematisches Institut
Universität Zürich
Freie Straße 36

CH-8032 Zürich

Prof. Dr. F. Pittnauer
Fachbereich Mathematik
Universität Duisburg
Lotharstr. 65

4100 Duisburg

Prof. Dr. N. Suita
Dept. of Mathematics
Tokyo Institute of Techn.
Oh-Okayama, Meguro-Ku

Tokyo

Japan

Prof. Dr. Ch. Pommerenke
Technische Universität
Fachbereich Mathematik FB 3
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin

Prof. Dr. S. Toppila
Dept. of Mathematic
University of Helsinki

SF 00100 Helsinki 10

Finnland

Prof. Dr. E. Reich
Forschungsinstitut
ETH-Zürich

CH-8092 Zürich

Prof. Dr. J. Williamson
Dept. of Mathematics
University of Hawaii

Honululu, HI 96822

U. S. A.

Dr. G. Schmieder
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1

3000 Hannover 1

Prof. Dr. J. Winkler
Technische Universität
Fachbereich Mathematik FB 3
Straße des 17. Juni 135

1000 Berlin

Prof. Dr. D. F. Shea
University of Wisconsin
Van Vleck Hall

Madison WI 53706

U. S. A.

Prof. Dr. H. Wittich
Universität Karlsruhe
Institut für Mathematik
Englerstr. 2

7500 Karlsruhe