MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 13/83

Numerische Methoden der Approximationstheorie

20.3. bis 26.3.1983

Die Tagung stand unter der Leitung von Herrn L. Collatz (Hamburg) und Herrn H. Werner (Bonn). Sie wurde von Teilnehmern aus zehn Ländern besucht und fand gleichzeitig mit einer kleineren Tagung über ein Informatikprojekt statt, was sich in fruchtbaren Gesprächen am Rande der Tagung positiv auswirkte, andererseits natürlich die Anzahl der Teilnehmer beschränkte.

Es kam wie immer bei einer solchen Klausurtagung zu einem regen Informationsaustausch, sei es in Form von Vorträgen oder von Diskussionen, so daß das Ziel der Tagung, Erfahrungen aus den verschiedensten Gebieten der numerischen Approximationstheorie miteinander auszutauschen und neuere Entwicklungen aufzuzeigen, erreicht wurde. Unter anderem wurden folgende Problemkreise und ihre numerische Realisierung angesprochen: Tschebyscheff-Approximation für die komplexe rationale Approximation, kardinale Exponentialsplines, Padè-Approximation, multivariate Approximation, nichtexpansive Abbildungen, lineare und nichtlineare Optimierung, Integralgleichungen und mathematische Modelle in der Medizin und den Ingenieurwissenschaften.

Die vom ersten Tage an reichen Diskussionsbeiträge lassen eine langfristige anregende Wirkung dieser Tagung auf die mathematische Forschungsarbeit auf den genannten Gebieten erwarten. Die angenehme Atmosphäre des Instituts und die vorbildliche Betreuung förderten den harmonischen Verlauf der Tagung. Der Leitung des Instituts und dem Personal des Hauses gilt daher der besondere Dank der Tagungsteilnehmer.

Vortragsauszüge

H. ARNDT

On Step Size Control for Volterra Integral Equations

In numerically solving Volterra integral equations of the second kind

$$y(x) = g(x) + \int_a^x K(x,t,y(t))\ dt \ , \ x \in [a,b] \ ,$$

where g and kernel K are given functions, known step size strategies proceed in the same way as in the case of ordinary differential equations. Since for integral equations the integration is carried out over a triangle, such a step size control estimates the local error along the diagonal of the triangle only. We develop a step size policy that controls the local error over the whole triangle and demonstrate the efficiency of the modified step size control by examples.

H. BRASS

Eine Optimalitätseigenschaft von Standard-Verfahren zur Polynom-Approximation

Es werde betrachtet die Approximation durch Polynome n-ten Grades auf $[-1,1]$ im Sinne der sup-Norm. $I_n[f]$ bezeichne das Interpolationspolynom von f bezüglich der Tschebyscheff-Knoten, $ba_n[f]$ das Polynom bester Approximation. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sup\,\|f - I_n[f]\|}{sup\,\|f - ba_n[f]\|} = 1$$

wobei das sup über alle Funktionen f mit $\|f^{(n+1-k)}\| \leq 1$ $(k = 0, 1, \ldots, fest)$ angenommen wird. Das war bisher nur für k=0 bekannt.

A. BULTHEEL

Algorithms to Compute the Reflection Coefficients of Digital Filters

There is a close relationship between algorithms for digital filtering and algorithms for Laurent-Padè approximation. Best known in digital filtering theory are the Levinson and Schur algorithm and the Nevanlinna-Pick algorithm. In Padè theory there also exist algorithms of qd-type. These algorithms can also be applied in the digital filtering environment. This method is not recommended to compute the reflection coefficients numerically, but from the theory of the qd-algorithm we learn that we can find transmission zeros from it. More specifically the transmission zero closest to the unit circle is found as the limit of the ratio of two successive reflection coefficients. These transmission zeros are used in a Nevanlinna-Pick interpolation algorithm to construct the digital filter.

L. COLLATZ

Einige Bemerkungen zur Numerik der multivariaten Approximation

Es wird auf einige Problemklassen hingewiesen, die für die Anwendung von Bedeutung sind, bei denen aber noch viele Fragen, insbesondere bei mehreren unabhängigen Veränderlichen (Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen) nicht genügend geklärt sind.

1. Verkettete Approximation (Auftreten der zu bestimmenden Parameter $a_1, a_2, \dots, a_p$ an verschiedenen Stellen, z.B. beim Quotienten- Einschließungssatz für Eigenwerte, bei Iteration für Fixpunkte monoton zerlegbarer Operatoren u.a.)
2. Aufstellung guter Näherungen für die b.m.A. (beste multivariate Approximation).
3. Aufstellung effektiver Algorithmen für die b.m.A. im nichtlinearen Fall.
4. d = Defekt = n+1-N, mit N = Anzahl der Extremalstellen. Bei größerem n wird oft d>0 beobachtet. Genauere Aussagen über d sind erwünscht und für die Berechnung einer b.m.A. sogar oft notwendig.
5. Brauchbare Charakterisierung einer b.m.A. im nichtlinearen Falle.
6. Erweiterung der Monotoniesätze bei Differentialgleichungen, z.B. bei hyperbolischen Gleichungen.
7. Brauchbare Berechnung der Ableitung bei Lösungen von Randwertaufgaben (mit numerischem Beispiel).

A. CUYT

Numerical Applications of Operator Padè Approximants

We repeat the definition of Operator Padè Approximant for a nonlinear operator F:X→Y where X is a Banach space and Y is a commutative Banach algebra; it is a generalization of the univariate Padè approximants completely following the ideas of the univariate theory. These Operator Padè Approximants prove to be efficient tools for the convergence acceleration of multidimensional tables, for the solution of nonlinear operator equations for the numerical approximation of multivariate functions.

W. DAHMEN

On the Approximation Order from Certain Classical Finite Element Spaces

Typical instances of bivariate spline spaces appearing in the context of finite element analysis are the spaces $\Pi^{\mu}_{k,h}$ of μ times continuously differentiable piecewise polynomials of degree $\leq k$ with respect to the h-scales of the various regular triangulations of the plane. However, for most choices of μ, k the precise approximation power of $\Pi^{\mu}_{k,\mu}$ is unknown. Some recent results on this subject revealed that the approximation properties of $\Pi^{\mu}_{k,h}$ are completely determined by the span of translates of certain locally supported elements of $\Pi^{\mu}_{k,h}$, the so called box-splines. In this context a general characterization of the approximation order from spans of translates of locally supported splines in terms of their Fourier transforms is established. Exploiting the simple structure of the Fourier transforms of box-splines this result allows to determine the exact approximation rates for $\Pi^{\mu}_{k,h}$, when μ is the highest possible nontrivial smoothness.

PH. DEFERT

H-Sets and References in General Uniform Approximation.

We first define H-sets in a more local way than the classical Collatz's definition and references as H-sets of the tangential space to the approximation family. We obtain the Kolmogorov conditions in terms of this notion and we derive a property of the approximating family which insures the existence of a characterization of a best approximation.

We then investigate the exchange algorithm. We give two conditions on the approximants that guarantees the convergence of this algorithm. This method is then applied to a bivariate exponential family.

I. DIENER

Trajectory Methods in Nonlinear Optimization and Approximation Theory

Let $f : G \to I\!R$ be a smooth function on $G \subset I\!R^n$. We are interested in the case where f has many local minima and consider the problem of finding the global minima. Trajectory methods associate with f a one-dimensional set X, which contains all the critical points of f. An example is provided by the BRANIN-Trajectories $X_g(f) := \{ x \mid g^T \nabla f(x) = 0 \}$, $g \in I\!R^n$. Unfortunately X is often nonconnected and one does not know how to get from one component to the next. A general result was presented showing that one can always connect the components by adding to X a certain set C of contour lines so that $X \cup C$ is connected. However this result does not imply that one can always numerically trace $\tilde{X} := X \cup C$. A weakly connected abstract Graph $G_f(\tilde{X})$ is associated with $\tilde{X}$, whose vertices are the critical points of f and a directed edge between vertices v_i, v_j is drawn whenever v_i can be reached from v_j. This Graph establishes a global relation between the critical points of f, which is not invariant under C^∞-Transformations. A number of numerical examples from optimization and approximation theory are shown to illustrate the concept.

M. GASCA

A Note on Recurrence Interpolation Formulas for Certain Sets of Points in $I\!R^k$

In 1960 Thatcher Jr. &Milne obtained an Aitken-Neville-like recurrence interpolation formula for multivariate interpolation. In this note we give some examples to show that the restrictive hypotheses used there can be weakened and the method can be applied in more general cases.

M. GUTKNECHT

Zur Komplexen Rationalen Approximation auf Kreisscheibe und Intervall (Gemeinsam mit L.N.Trefethen, Courant Institute)

Für die rationale Tschebyscheff-Approximation auf dem Einheitskreis gilt:
(a) die beste Approximation ist i.a. nicht eindeutig;
(b) die Anzahl bester Approximationen kann beliebig groß sein;

(c) die beste Approximation einer reellen analytischen Funktion ist i.a. selbst dann nicht eindeutig, wenn man sich auf reelle rationale Approximanten beschränkt;

(d) die komplexe beste Approximation einer solchen Funktion ist i.a. besser als die reelle. Bekanntlich ist auch auf einem reellen Intervall die beste komplexe rationale Approximation i.a. besser als die beste reelle Approximation. Unter der Voraussetzung, daß der Nennergrad n um mindestens drei größer ist als der Zählergrad m, haben wir gezeigt, daß sie sogar beliebig viel besser sein kann. Umgekehrt gilt dies nicht für m=0, n=1. Ähnliche Ergebnisse gelten für gewisse Jordan-Gebiete, die symmetrisch zur reellen Achse sind.

D.C. HANDSCOMB

A Problem in Underwater Navigation

The problem is that of obtaining a best estimate of position of an underwater vessel, from a combination of measurements of its velocity and comparisons of echo-sounding observations with a previously-constructed map of the depth of the sea bed.

H. KARDESTUNCER

On the properties of Stiffness Matrices in Finite Element Methods

The stiffness matrices encountered in the analysis of elastic systems using finite element methods possess certain properties the use of which in the solution procedures reduces the computer time and increases the accuracy of the results. The presentation will place emphasis on the application of the theory to skeletal systems using one-dimensional elements. References, however, will be made to two and three dimensional finite elements.

C. MICCHELLI

Some Remarks on Kriging

Apparently it was unknown that the Kriging equations corresponding to Hardy' s multi-quadric surfaces are always solvable. This was first brought to our attention by Salkauskus and later by Whaba. It was also recently mentioned as an open problem in a paper of Barnhill and Stead.

This talk reports on some work in progress with I.Burbeq on positive definite functions. Among other things, we show that

$$M_{\mu,\delta}(x,y) = \left(1+\|x-y\|^{\delta}\right)^{-\mu}, \quad \|x\| = \sum x_i^2$$

is strictly positive definite on $I\!R^s$ if and only if $0 < \delta \leq 2$ and $\mu > 0$). The case $\delta = 2$ and $\mu = \frac{1}{2}$ solves the above problem.

G. NÜRNBERGER

Starke Eindeutigkeit bei der Numerischen Berechnung Bester Splineapproximationen

Im Jahre 1981 haben M.Sommer und der Autor einen Remez-Algorithmus zur Berechnung bester Approximationen bzgl. $S_{n,k}$, dem Raum der Splinefunktionen vom Grad n mit k festen Knoten, entwickelt. Dabei spielen stark eindeutige beste Approximationen und die zugehörige Konstante starker Eindeutigkeit eine wichtige Rolle. Wir behandeln deshalb folgende Fragen, wobei S $=$ $\{ f \in C[a,b] \mid f$ besitzt eine eindeutige beste Approximation bzgl. $S_{n,k} \}$:

1. Welche Funktionen liegen in S ?
2. Welche Funktionen liegen im Innern von S (d.h. welche Funktionen aus S sind "stabil unter kleinen Störungen")?
3. Formeln zur Berechnung der Konstante starker Eindeutigkeit.
4. Konvergenzgeschwindigkeit bei stark eindeutigen besten Approximationen.

Ferner werden einige numerische Beispiele gegeben.

P. PALLASCHKE

Khachian' s Algorithm in Linear Programming

The modification of Khachian' s Algorithm, which was published by H.König and P.Pallaschke in Num. Mathematik 36, pp. 211-223 was presented. The main idea of this modification consists in cutting the ellipsoids which contain the feasable region by means of the worst and the best constraint. This leads to a numerically stable algorithm to solve linear programs.
Especially the behaviour of the axis of the ellipsoide are discussed. It turned out that in this modified version of the algorithm all axes are shrinking, whereas the original version had the disadvantage that only one axis was permanently growing.
To illustrate this fact, several numerical examples were presented.

P.W. PEDERSEN

A Simple Methods for Computing Minmax Approximations

Let $F = F(x)$ denote a function for which you want a minmax approximation $A = A(x)$ over an interval $[P,Q]$. For example $A(x) = K + Lx + \ldots$, so that you want $K^*, L^*, \ldots$ to give

$$\min_{K,L,\ldots} \max_{x\in[p,q]} |F(x) - A(x)| .$$

Let furthermore

$$\mathcal{EM}(K,L,\ldots) := \max_{x} |F(x) - (K + Lx + \ldots)|$$

With n+1 Variables $K, L, \ldots$ we thus want a point $K^*, L^*, \ldots$ so that A with this values gives equioscillation in n+2 points $P, R^1, \ldots, R^n, Q$, the points R_i being between P and Q.

It turns out that if you plot $\mathcal{EM}$ as a function of one variable, f ex. K, having the other ones fixed, you get for $K, L, \ldots$ "reasonably" close to $K^*, L^*, \ldots$,piecewise linear (approximately) functions with certain bending points or kinks. At the bending points, where there is a sudden change in the max error $\mathcal{EM}$,there will be equioscillation EO in n points. The bending points from lines in f ex a K, L plane and these lines cross at points with EO in n+1 points. Now taking f ex. $\mathcal{M}$ as a third variable, the crossing points form lines (again approx. straight) which cross at a point with EO in n+2 points, i.e. in $(K^*, L^*, \ldots)$

R. SCHABACK

Splines and Kriging

Kriging problems arising in geology are identified as spline interpolation processes based on reproducing kernels in function spaces. A series of examples is taken from recent literature and treated mathematically by methods dating back to a 1973 paper by the author. Finally, "Experimental Kriging" using the autocorrelation function of a crude approximation to the data as a reproducing kernel is introduced. Some examples with real-life data on non-gridded points are given to indicate both the applicability and the numerical problems involved with "Splines and Kriging".

W. SCHEMPP

Euler-Frobenius-Polynome

Die nach Euler und Frobenius benannten Polynome $(p_m)_{m\geq 1}$ gewannen neue Bedeutung für Probleme der kardinalen Spline-Interpolation und der numerischen Fourier-Analysis (Theorie der Abminderungsfaktoren). Ziel des Vortrages ist es, einen neuen Zugang zu den Euler-Frobenius-Polynomen $(p_m)_{m\geq 1}$ aufzuzeigen, der auf der Theorie der kardinalen Exponentialsplines beruht und zu einer komplexen Kurvenintegraldarstellung mit nichtkompaktem Integrationsweg führt (vgl. Contemporary Mathematics, Vol. 7 Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. 1982). Aus ihr lassen sich dann leicht die fundamentalen Eigenschaften der Polynome $(p_m)_{m\geq 1}$ ablesen.

S.P. SINGH

Successive Approximation for Nonexpansive Mappings

Among other results we discuss the following. Let C be a closed subset of a Banach space X and
$f : C \to X$ a quasinonexpansive mapping, i.e.

$$\|f\kappa - p\| \leq \|\kappa - p\| \ \textit{for each } \kappa \in C \textit{ and } p \in F(f)\,,$$

$F(f)$ denotes the fixed point set of f.
Let $\{c_n\}$ be a sequence such that $c_n \in (0,1]$, for each n. Let $\kappa_1 \in C$ be such that κ_{n+1}be defined by

$$(*) \qquad \kappa_{n+1} = c_n f\kappa_n + (1-c_n)\kappa_n \ \textit{for each } n$$

(Noting that if $0 < c_n < 1$ and $\sum c_n$ diverges than $\{\kappa_n\}$ is a normal Mann Process and if $c_n = 1$ for each n, then $\{\kappa_n\}$ is the sequence of iterates of κ_1).Suppose that $\kappa_1 \in C$ is such that (*) yields $\{\kappa_n\}$ either as a sequence in normal Mann Process or a sequence of iterates. If $\lim_{n\to\infty} d(\kappa_n, F) = 0$, then $\{\kappa_n\}$ converges to a fixed point on f. Numerical examples will also be discussed.

H. WERNER

Die Diagnose von Knieverletzungen - ein Identifikationsproblem

In Münster wurden von Herrn Dr.med Stedtfeld für eine große Anzahl von Knieverletzungen (Verletzungstypen) zu vorgegebenen Bewegungen des Knies und Drehungen des Fußes (Kniestellungen) die Verschiebung der Knochen gegen die Normallage des gesunden Knies ermittelt. Die Daten wurden Herrn Dipl.math. Stenzel und dem Referenten in Bonn zur Auswertung übergeben. Die Aufgabe der Diagnose ist nun, aus den Antworten bei einigen Kniestellungen auf den vorliegenden Verletzungstyp zu schließen. Es ist zunächst zu entscheiden, wieviele Einstellungen (d. h. Röntgenaufnahmen) für eine Entscheidung notwendig sind, außerdem ist die Gesamtheit dieser minimalen Lösungen für das Entscheidungsproblem anzugeben. Die Aufgabe wird auf ein kombinatorisches Problem zurückgeführt, und es werden Algorithmen zur Bestimmung der Minimalzahl von notwendigen Einstellungen sowie zur Aufzählung der Minimallösungen angegeben. Es wird auf die praktischen Schwierigkeiten hingewiesen, die durch die fließenden Übergänge zwischen den Verletzungstypen entstehen.

K. ZELLER

Interpolation and Approximation

Der Vortrag behandelt folgende Themen (Gemeinschaftsarbeit mit W.Haußmann und E.Luik):
Beziehungen zwischen Approximationsgraden und Fourierkoeffizienten;
Untersuchung des Interpolationsrestes mit der BOGS-Methode;
Überprüfung und Verfeinerung des Interpolationspolynoms unter Verwendung von einigen Kontrollknoten;
weitere Verfahren zur Sofort-Approximation.

Berichterstatter: H. Arndt, C. Maas

Tagungsteilnehmer

Herrn
Dr. H. Arndt
Institut f. Angew. Mathematik
Wegelerstr. 6

5300 Bonn 1

Herrn
Prof. Dr. W. Dahmen
Fakultät f. Mathematik
Universität Bielefeld
Universitätsstraße

4800 Bielefeld

Herrn
Dr. C.T.H. Baker
Department of Mathematics
The Victoria University of
Manchester
Oxford Road

Manchester M13 9PL /England

Herrn
Dipl. Math. P. Defert
Département de Mathématique
F.N.D.P.
8, rempart de la Vierge

B-5000 Namur (Belgien)

Herrn
Prof. Dr. H. Brass
Institut f. Angew. Mathematik
der TU Braunschweig
Pockelsstr. 14

3300 Braunschweig

Herrn
Dipl.-Math. I. Diener
Institut f. Numerische & Angew.
Mathematik
Lotzestr. 16-18

3400 Göttingen

Herrn
Prof. Dr. A. Bultheel
K.U. Leuven
Dept. Computer Science
Celestynenlaan 200 A

B-3030 Heverlee /Belgien

Herrn
Prof. Dr. M. Gasca
Depto. Ecuaciones Funcionales
Facultad de Ciencias (Matemat.)
Universidad de Zaragoza

Zaragoza /Spanien

Herrn
Prof. Dr. L. Collatz
Institut f. Angew. Mathematik
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Herrn
Prof. Dr. C. Geiger
Institut f. Angew. Mathematik der
Universität Hamburg
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Frau
Dr. Annie Cuyt
Dept. Mathematics V.I.A.
University of Antwerp
Universiteitsplein 1

B-2610 Wilryk /Belgien

Herrn
Prof. Dr. K. Glashoff
Institut f. Angew. Mathematik
der Universität Hamburg
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Herrn
Prof. Dr. M. Gutknecht
Seminar f. Angew. Mathematik
ETH-Zentrum HG

CH-8092 Zürich /Schweiz

Herrn
Prof. Dr. H. Kardestuncer
University of Connecticut
U-37

Storrs, Connecticut 06268
USA

Herrn
Prof. Dr. D. Handscomb
Oxford University
Computing Laboratory
19 Parks Road

Oxford OX1 3PL /England

Herrn
Prof. Dr. V. Klotz
Universität GH Siegen
Fachbereich 6 - Mathematik
Hölderlinstraße

5900 Siegen 21

Herrn
Dr. R. Haverkamp
Institut f. Angew. Mathematik
Wegelerstr. 6

5300 Bonn 1

Herrn
Dr. C. Maas
Universität Hamburg
Institut f. Angew. Mathematik
Bundesstr. 55

2000 Hamburg 13

Herrn
Prof. Dr. R. Hettich
FB IV (Mathematik)
Postfach 3825

5500 Trier

Herrn
Prof. Dr. G. Merz
Gesamthochschule Kassel
Fachbereich 17 - Mathematik
Wilhelmshöher Allee 73

3500 Kassel

Frau
Dipl.-Math. G. Kaiser
Universität Mannheim
Falkultät f. Mathematik und
Informatik

6800 Mannheim 1

Herrn
Dr. C. Micchelli
IBM Research
P.O.B. 218

Yorktown Height, N.Y.

Herrn
Dipl.-Math. U. Kaiser
Universität Mannheim
Falkultät f. Mathematik und
Informatik

6800 Mannheim 1

Herrn
Prof. Dr. M. W. Müller
Lehrstuhl Mathematik VIII
Universität Dortmund
Postfach 500500

4600 Dortmund 50

Herrn
Dr. G. Nürnberger
Institut f. Angew. Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg
Martensstr. 3

8520 Erlangen

Herrn
Prof. Dr. S.P. Singh
Math. Dept.
Memorial University
St. Johns. Nfld.

Canada AIB 3x7

Herrn
Prof. Dr. D. Pallaschke
Institut f. Statistik u. math.
Wirtschaftstheorie
Universität Karlsruhe
Kaiserstr. 12

7500 Karlsruhe 1

Herrn
Prof. Dr. M. Sommer
Mathem.-Geograph. Fakultät
Kath. Universität Eichstätt
Ostenstr. 26-28

8078 Eichstätt

Herrn
Prof. Dr. P.W. Pedersen
Institut f. Mathematic, Bg. 303
D.T.H.

DK-2800 Lyngby /Dänemark

Herrn
Prof. Dr. H. Werner
Institut f. Angew. Mathematik
Universität Bonn
Wegelerstr. 6

5300 Bonn 1

Herrn
Prof. Dr. R. Schaback
Institut f. Numerische u. Angew.
Mathematik
Lotzestr. 16-18

3400 Göttingen

Herrn
Prof. Dr. W. Wetterling
Techn. Hogeschool Twente
Onderafdeling TW
Postbus 217

NL-7500 AE Enschede /Niederlande

Herrn
Prof. W. Schempp
Lehrstuhl f. Mathematik I
der Universität Siegen
Hölderlinstr. 3

5900 Siegen

Herrn
Prof. Dr. K. Zeller
Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Auf der Morgenstelle 10

7400 Tübingen

Frau
Dr. R. Schmidt
Hahn-Meitner-Institut
Glienicker Str. 100

1000 Berlin 39